Afina in projektivna geometrija (PREDAVANJA)

UVOD

Kaj je geometrija?

n-razsežna geometrija sestoji iz n množic: $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$

Elemente množice P_0 imenujemo točke, elemente P_1 imenujemo premice, ..., elemente P_{n-1} imenujemo hiperravnine.

Ponavadi izberemo $P_i \subseteq P(P_0)$ za $i=1,\dots,n-1$

Med množicami P_i obstajajo INCIDENČNE RELACIJE, ki so v zgornjem primeru kar $\in$ oz. $\subseteq$.

Če predpišemo aksiome, katerim naj incidenčne relacije zadoščajo, dobimo različne geometrije.

TRANSFORMACIJA $\tau: G \to G'$ med n-razsežnima geometrijama sestoji iz n bijekcij $\tau_i: P_i \to P_i'$ $(i=0,\dots,n-1)$, ki so usklajene z incidenčnimi relacijami.

V nekaterih geometrijah podamo še pogoje na transformacije, na primer v Evklidski geometriji zahtevamo, da transformacije ohranjajo pravi kot.

F. Klein: Geometrija je proučevanje invariant, ki se ukvarjajo s transformacijami.

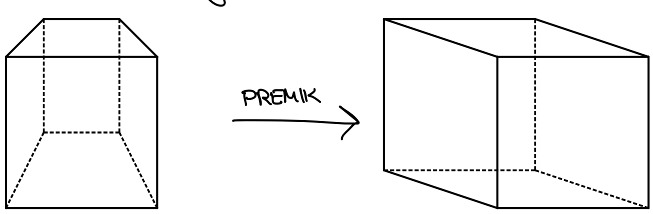
Zakaj bi študirali neevklidske geometrije?

Eden od aksiomov evklidske geometrije pravi:

Naj bo T točka v ravnini in p premica v ravnini. Tedaj obstaja natanko ena premica, ki gre skozi T in je vzporedna premici p.

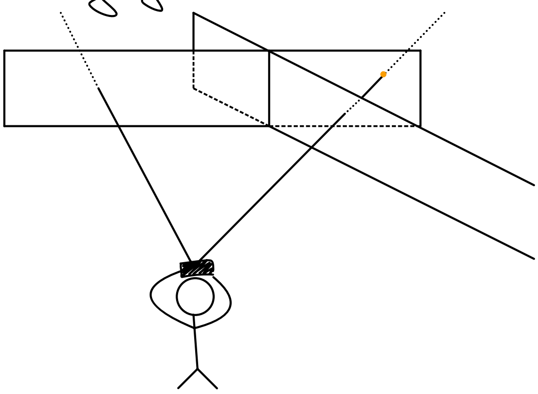
Dolgo časa je bilo neznano ali zgornji aksiom sledi iz ostalih aksiomov Evklidske geometrije.

Šele okoli leta 1830 sta János Bolyai (1802–1868) in N. I. Lobačevski (1792–1856) neodvisno "odkrila" geometrijo, ki zadošča vsem aksiomom Evklidske geometrije, razen aksiomu vzporednosti.



Pri "pravih" transformacijah se koti in dolžine ohranjajo.

Želimo zlepiti dve fotografiji:



Evklidska ravnina je "nesimetrična":

- za dve premici velja, da sta bodisi vzporedni, bodisi se sekata v eni točki
- imamo 3 tipe stožnic: elipse, hiperbole in parabole.

AFINA GEOMETRIJA

AFINI PODPROSTORI V VEKTORSKIH PROSTORIH

Naj bo $\mathbb{O}$ obseg in V končnorazsežen vektorski prostor nad $\mathbb{O}$.

DEFINICIJA: $a \in V$, $W \leq V$. Množico $a+W = \{a+w;\ w \in W\}$ imenujemo AFIN PODPROSTOR v V.

DEFINICIJA: A je AFIN PROSTOR, če je afin podprostor kakega vektorskega prostora.

LEMA: Naj bo $A = a+W$ afin prostor. Za vsak $b \in A$ je $A = b+W$.

Dokaz:

$b \in A \Rightarrow b = a+w$ za nek $w \in W \Rightarrow b+W = a+w+W = a+W = A$ $\square$

POSLEDICA: $A = a+W$, $B = b+U$ afina podprostora v V. Če je $A \subseteq B$, je $W \subseteq U$.

Dokaz: $a \in A \subseteq B \xRightarrow{\text{lema}} B = a+U$

$A \subseteq B \Rightarrow a+W \subseteq a+U \Rightarrow W \subseteq U$. $\square$

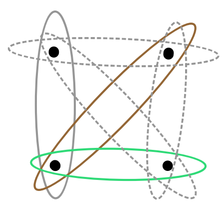
POSLEDICA: $A = a+W = a'+W' \Rightarrow W = W'$

Dokaz: dvakrat uporabimo prejšnjo posledico: $a+W \subseteq a'+W' \rightarrow W \subseteq W'$

$a'+W' \subseteq a+W \rightarrow W' \subseteq W$ $\square$

DEFINICIJA: RAZSEŽNOST afinega prostora $A = a+W$ je $\dim A = \dim W$

Primer: $\mathbb{O} = \mathbb{Z}_2$, $V = \mathbb{Z}_2^2$. Poišči vse afine premice v V.



Vsak 1-razsežen vektorski prostor v V je določen z neničelnim vektorjem.
Torej imamo 3 1-razsežne vektorske podprostore.

Vsaka dvoelementna podmnožica je afina premica.

DEFINICIJA: Vsoto $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$; $\alpha_i \neq 0$, $a_i \in A$ in $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ imenujemo AFINA KOMBINACIJA elementov iz A.

TRDITEV: Naj bo karakteristika obsega $K(O) \neq 2$ $(1+1\neq 0)$. Potem je $A \subseteq V$ afin podprostor natanko takrat, ko je poljubna afina kombinacija elementov iz A v A.

Dokaz:
($\Rightarrow$): $A = a+W$ afin podprostor

$$a+w_1,\ a+w_2 \in A,\ \alpha_1,\alpha_2 \in O \ni: \alpha_1+\alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1(a+w_1)+\alpha_2(a+w_2) = \underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)a}_{=a} + \underbrace{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}_{\in W} \in A$$

($\Leftarrow$): $W := \{x-a \mid x \in A\}$ je vektorski prostor

$$x-a,\ y-a \in W,\ \alpha_1,\alpha_2 \in O \Rightarrow \alpha_1(x-a)+\alpha_2(y-a) \in W$$

$$\alpha_1(x-a)+\alpha_2(y-a) = \alpha_1 x + \alpha_2 y - (\alpha_1+\alpha_2)a \in W$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha_1 x + \alpha_2 y - (\alpha_1+\alpha_2)a \in A$$
$$\underset{\in A}{\alpha_1 x} + \underset{\in A}{\alpha_2 y} + (1-\alpha_1-\alpha_2)\underset{\in A}{a} \leftarrow \text{afina kombinacija elementov iz } A$$

Po predpostavki, je to torej iz A. $\square$

LEMA: $K(O)\neq 2$, $A \subseteq V$. Poljubna afina kombinacija dveh točk iz A je v A natanko takrat, ko je poljubna afina kombinacija točk iz A v A.

Dokaz: ($\Leftarrow$): očitno
($\Rightarrow$): (indukcija na število točk v afini kombinaciji)

$\underline{n=3}$: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1$

Če $\alpha_1+\alpha_2 = 0 = \alpha_1+\alpha_3 = \alpha_2+\alpha_3 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3 = 1 \Rightarrow 3\cdot 1 = 1$ oz $2\cdot 1 = 0$ $\times$ $(K(O)\neq 2)$

BŠS: $\alpha_1+\alpha_2 \neq 0$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)\underbrace{\left((\alpha_1+\alpha_2)^{-1}\alpha_1 a_1 + (\alpha_1+\alpha_2)^{-1}\alpha_2 a_2\right)}_{\text{afina kombinacija dveh elementov iz } A} + \alpha_3 a_3}_{\text{afina kombinacija dveh elementov iz } A} \in A$$

$\underline{n\geq 4}$: če je $\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1} = 0$, potem je $\alpha_1+\dots+\alpha_{n-2}\neq 0$ (sicer $\alpha_{n-1}=0$ in imamo opravka z afino kombinacijo $n-1$ elementov)

i) $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1} = \alpha \neq 0$
$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{n-1}a_{n-1} = \alpha\underbrace{\left(\alpha^{-1}\alpha_1 a_1 + \alpha^{-1}\alpha_2 a_2 + \dots + \alpha^{-1}\alpha_{n-1}a_{n-1}\right)}_{\in A \text{ po I.P.}} + \alpha_n a_n \in A$$

ii) $\alpha_1+\dots+\alpha_{n-2} = \alpha \neq 0$
$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \alpha\underbrace{\left(\alpha^{-1}\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha^{-1}\alpha_{n-2}a_{n-2}\right)}_{\in A \text{ po I.P. } (n-2\geq 2)} + \alpha_{n-1}a_{n-1} + \alpha_n a_n \in A$$

$\square$

TRDITEV: Če je presek P kake družine afinih podprostorov v V neprazen, potem je afin podprostor.

Dokaz:

$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ družina afinih podprostorov v V

Obstaja $x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \Rightarrow A_\lambda = x + W_\lambda \Rightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(x+W_\lambda) = x + \bigcap_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$

$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ je vektorski podprostor v V, zato je $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ afin podprostor. $\square$

DEFINICIJA: AFINA OGRINJAČA množice $X \subseteq V$ je presek vseh afinih podprostorov, ki vsebujejo množico X.
Označimo jo z $Af(X)$ in je afin podprostor (po trditvi).

TRDITEV: $Af(X)$ je enaka množici vseh afinih kombinacij elementov iz X.

Dokaz:

Naj bo A množica vseh afinih kombinacij elementov iz X.

$A \subseteq Af(X)$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in A \quad (x_i \in X, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1)$

Ker $X \subseteq Af(X)$, je $x_i \in X.\ \forall i$.

Po trditvi, vsaka afina kombinacija elementov iz $Af(X)$ je v $Af(X)$.

$Af(X) \subseteq A$

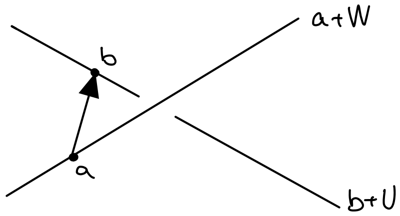
$1x \in A \Rightarrow X \subseteq A$

Če pokažemo, da je A afin podprostor, velja želena inkluzija.

Afina kombinacija elementov iz A je afina kombinacija elementov iz X.
Zato leži v A.

$\Rightarrow$ A je afin podprostor. $\square$

Afini prostori imajo lahko prazen presek:



LEMA: $A = a + W$, $B = b + U$ afina podprostora v V.
Velja: $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow b - a \in W + U$
$\quad$ Lin $\{W \cup U\}$

Dokaz:
$(\Rightarrow)$: $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists w \in W$ in $\exists u \in U.\ \ni: a + w = b + u \Rightarrow b - a = w - u \in W + U$

$(\Leftarrow)$: $b-a \in W+U \Rightarrow \exists w \in W$ in $\exists u \in U \ni: b-a = w+u$

$\Rightarrow \underbrace{a+w}_{\in A} = \underbrace{b-u}_{\in B} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ $\square$

LEMA: $Af((a+W) \cup (b+U)) = a+W+U+\mathcal{L}in\{b-a\}$

Kaj pomeni DS? ?

Dokaz:

Naj bo $T := W+U+\mathcal{L}in\{b-a\} \rightarrow$ DS: $a+T$

$$a+T = a+(b-a)+T = b+T$$

$(\subseteq)$: $\left.\begin{array}{l} a+W \subseteq a+T \\ b+U \subseteq b+T = a+T \end{array}\right\} \Rightarrow Af((a+W)\cup(b+U)) \subseteq a+T$ ✓

$(\supseteq)$: Naj bo $\mathcal{C}$ poljuben afin podprostor, ki vsebuje $(a+W)\cup(b+U)$.

$\Rightarrow \mathcal{C} = a+S = b+S$ za nek $S \leq V$

$a+W \subseteq a+S \Rightarrow W \subseteq S$

$b+U \subseteq a+S \Rightarrow U \subseteq S$

$\underset{\substack{\| \\ a+S}}{a, b \in \mathcal{C}} \Rightarrow b-a \in S \Rightarrow \mathcal{L}in\{b-a\} \subseteq S$

$\Rightarrow \underbrace{W+U+\mathcal{L}in\{b-a\}}_{T} \subseteq S$

$\Rightarrow a+T \subseteq a+S = \mathcal{C}$ $\square$

TRDITEV: $A = a+W$, $B = b+U$ afina podprostora v V.

Velja: $\dim Af(A \cup B) = \dim(W+U)+1 \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

obe prestavimo v izhodišče in gledamo dimenzijo

Dokaz:

$A \cap B = \emptyset \overset{\text{lema}}{\Longleftrightarrow} b-a \notin W+U$

$\Leftrightarrow \mathcal{L}in\{b-a\} \nsubseteq W+U$

$\Leftrightarrow \dim Af(A \cup B) = \dim((W+U)+\mathcal{L}in\{b-a\}) = \dim(W \cup U)+1$ $\square$

DEFINICIJA: $A = a+W$, $B = b+U$ afina podprostora v V.
A in B sta VZPOREDNA, če $W \subseteq U$ ali $U \subseteq W$.
Pišemo $A \parallel B$.

IZREK: (a) Če je $A \cap B \neq \emptyset$, je $A \parallel B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ali $B \subseteq A$.
(b) Če je $A \cap B = \emptyset$, je $A \parallel B \Leftrightarrow \dim Af(A \cup B) = \max\{\dim A, \dim B\}+1$

Dokaz:

(a): $\exists x \in A \cap B \Rightarrow A = x+W \wedge B = x+U$

$$A \parallel B \Leftrightarrow (W \subseteq U \vee U \subseteq W) \Leftrightarrow (x+W \subseteq x+U) \vee (x+U \subseteq x+W)$$

(b) $A = a+W$, $B = b+U$

$$A \parallel B \Leftrightarrow (W \subseteq U \vee U \subseteq W) \Leftrightarrow (W+U = U) \vee (W+U = W)$$

$\Leftrightarrow \dim(W+U) = \max\{\dim U, \dim W\}$

$\overset{\text{trditev}}{\Leftrightarrow} \dim Af(A \cup B) = \max\{\dim U, \dim W\}+1$ $\square$

DEFINICIJA: Množica $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ je **AFINO NEODVISNA**, če je $\{x_0 - x_1, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ linearno neodvisna.

DEFINICIJA: Množica $X \subseteq \mathcal{A}$ je **AFINA BAZA** za $\mathcal{A}$, če je afino neodvisna in $\mathrm{Af}(X) = \mathcal{A}$.

TRDITEV: Naj bo $\mathcal{A} = a + W$ afin podprostor.
(a) $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ je afina baza za $\mathcal{A} \Leftrightarrow \{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$ baza za W.
(b) $\{e_1, \dots, e_n\}$ je baza za $W \Leftrightarrow \{a, a+e_1, \dots, a+e_n\}$ je afina baza za $\mathcal{A}$.

(dokaz v skripti)

POSLEDICA: Vsako afino neodvisno podmnožico v $\mathcal{A}$ lahko dopolnemo do afine baze za $\mathcal{A}$.

SEMILINEARNE PRESLIKAVE

DEFINICIJA: U, V vektorska prostora nad $\mathbb{O}$.
Preslikava $A: U \to V$ je **SEMILINEARNA**, če je:
- **ADITIVNA**: $A(x+y) = Ax + Ay, \ \forall x, y \in U$
- **SEMIHOMOGENA**: obstaja avtomorfizem f obsega $\mathbb{O}$, da je $A(\alpha x) = f(\alpha) A x, \ \forall x \in U \wedge \forall \alpha \in \mathbb{O}$.

Primer: $\mathbb{O} = \mathbb{C}, \ f(z) = \bar{z}$

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ linearna preslikava

definiramo $B: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ s predpisom $Bx := A(\bar{x})$

aditivnost: $B(x+y) = A(\overline{x+y}) = A\bar{x} + A\bar{y} = Bx + By$ ✓

semihomogenost: $B(\alpha x) = A(\overline{\alpha x}) = A(\bar{\alpha}\bar{x}) = \bar{\alpha} A(\bar{x}) = f(\alpha) Bx$ ✓

Opomba: Grupa avtomorfizmov obsegov $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{P}$ je trivialna.
$\Rightarrow$ V teh primerih je vsaka semilinearna preslikava linearna.

Opomba: Vsaka semilinearna preslikava je natanko določena z avtomorfizmom f in slikami baznih vektorjev.

TRDITEV: $A: U \to V$ semilinearna preslikava.
(a) $W \leq U \Rightarrow AW \leq V$
(b) $W \leq V \Rightarrow A^{-1} W \leq U$

Dokaz:
Naj bo f avtomorfizem obsega, ki pripada semilinearni preslikavi A.

(a) $Ax, Ay \in AW, \ \alpha, \beta \in \mathbb{O}$

$$\alpha Ax + \beta Ay = A(f^{-1}(\alpha)x) + A(f^{-1}(\beta)y) =$$
$$= A(\underbrace{f^{-1}(\alpha)x + f^{-1}(\beta)y}_{\in W}) \in AW$$

(b) $x, y \in A^{-1}W, \ \alpha, \beta \in U$

$$\Downarrow$$

$$Ax, Ay \in AW \Rightarrow \underbrace{f(\alpha)Ax + f(\beta)Ay}_{\in W} = A(\alpha x + \beta y) \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A^{-1}W$$

$\square$

POSLEDICA: Zaloga vrednosti in jedro semilinearne preslikave sta vektorska podprostora.

TRDITEV: Injektivna semilinearna preslika linearno neodvisne vektorje v linearno neodvisne vektorje.

Dokaz:

$x_1, \dots, x_n$ linearno neodvisni vektorji (*)

$$\alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_n Ax_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow A(f^{-1}(\alpha_1)x_1 + \dots + f^{-1}(\alpha_n)x_n) \Rightarrow f^{-1}(\alpha_1)x_1 + \dots + f^{-1}(\alpha_n)x_n = 0$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} f^{-1}(\alpha_1) = \dots = f^{-1}(\alpha_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

$\square$

TRDITEV: (a) Kompozitum semilinearnih preslikav je semilinearna preslikava.

(b) Inverz bijektivne semilinearne preslikave je semilinearna preslikava.

Dokaz:

(a): $A: U \to V$ semilinearna preslikava z avtomorfizmom f
$B: V \to W$ semilinearna preslikava z avtomorfizmom g

aditivnost: $BA(x+y) = B(Ax + Ay) = BAx + BAy$ ✓

semihomogenost: $BA(\alpha x) = B(f(\alpha)Ax) = g(f(\alpha))BAx$ ✓

(b): $A: U \to V$ bijektivna semilinearna preslikava z avtomorfizmom f

- $x, y \in V \Rightarrow \exists!\ x' \in U \ni: Ax' = x$
  $\exists!\ y' \in U \ni: Ay' = y$

  $$\Rightarrow A(x'+y') = Ax' + Ay' = x + y$$
  $$x' + y' = A^{-1}(x+y) = A^{-1}x + A^{-1}y \Rightarrow A^{-1} \text{ aditivna}$$

- $A(f^{-1}(\alpha)x') = \alpha Ax' = \alpha x$
  $f^{-1}(\alpha)x' = A^{-1}(\alpha x)$
  $f^{-1}(\alpha)A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}$ je semihomogena

$\square$

AFINE TRANSFORMACIJE

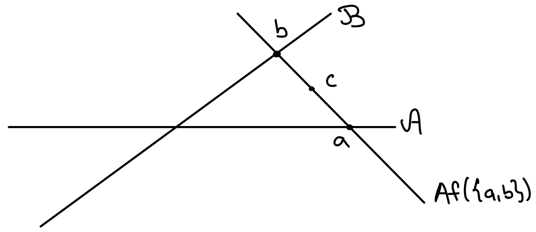
DEFINICIJA: $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ afina podprostora vektorskega prostora V, $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} \geq 2$.
Bijekcija $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je AFINA TRANSFORMACIJA, če kolinearne točke preslika v kolinearne točke.

IZREK: Slika premice z afino transformacijo je premica.

<u>Opomba</u>: Definicija pravi, da je slika premice podmnožica premice.

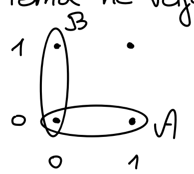
V primeru, ko je obseg O končen, imajo premice končno mnogo točk (toliko kot O) in je slika premice res premica.

LEMA: Naj bo $O \neq \mathbb{Z}_2$; $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ afina podprostora vektorskega prostora V nad O; $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ in $c \in Af(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.
Obstajata točki $a \in \mathcal{A}$ in $b \in \mathcal{B}$, da je $c \in Af(\{a, b\})$.



<u>Opomba</u>: (1) Če $O = \mathbb{Z}_2$, lema ne velja.

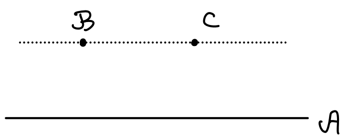
$V = \mathbb{Z}_2^2$:



$Af(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = V$
Ni elementa $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, da je $c \in Af(\{a, b\})$.

(2) Če $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, lema ne velja.

$V = \mathbb{R}^2$:



Dokaz:

$\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ afina baza za $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$
$\{x_0, \dots, x_k, a_1, \dots a_n\}$ afina baza za $\mathcal{A}$
$\{x_0, \dots, x_k, b_1, \dots, b_m\}$ afina baza za $\mathcal{B}$

$$c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j + \sum_{\ell=0}^{k} \gamma_\ell x_\ell \quad ; \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}_{\alpha} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \beta_j + \sum_{\ell=0}^{k} \gamma_\ell}_{\beta} = 1$$

Ločimo primera:

(1) $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$:

$$c = \alpha \underbrace{\overbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha^{-1} \alpha_i a_i}^{=: a}}_{\substack{\text{afina kombinacija} \\ \text{elementov iz } \mathcal{A}, \\ \text{je v } \mathcal{A}}} + \beta \underbrace{\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} \beta^{-1} \beta_j b_j + \sum_{\ell=0}^{k} \beta^{-1} \gamma_\ell x_\ell \right)}^{b :=}}_{\substack{\text{afina kombinacija elementov} \\ \text{iz } \mathcal{B}, \text{ je v } \mathcal{B}.}}$$

$\Rightarrow c \in Af(\{a, b\})$

(2) $\alpha=0$ ali $\beta=0$:

obstaja $\gamma \in \mathbb{O}\setminus\{0,-\alpha,\beta\}$ (razlika je neprazna množica)

$$c=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i+\gamma x_0\right)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j b_j+\left(\sum_{l=0}^{k}\gamma_l x_0-\gamma x_0\right)$$

□

LEMA: Naj bo $\tau: \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ afina transformacija.
Denimo, da obstajata premici $p\in\mathcal{A}$ in $q\in\mathcal{B}$, da $\tau(p)\subsetneqq q$.
Potem v $\mathcal{A}$ obstajajo afini podprostori $\mathcal{A}_i$, da velja:

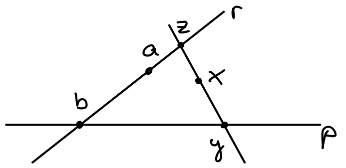
i) $p=\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}_2\subset\dots\subset\mathcal{A}_n=\mathcal{A}$;
ii) $\dim\mathcal{A}_i=i \quad \forall i$;
iii) $\dim \mathrm{Af}(\tau(\mathcal{A}_i))<i \quad \forall i\geq 2$.

Dokaz:

τ je surjektivna $\Rightarrow \exists a\in\mathcal{A}\setminus p \ni: \tau(a)\in q$

$\mathcal{A}_2 := \mathrm{Af}(p\cup\{a\}) \xRightarrow{\text{trditev}} \dim\mathcal{A}_2=2$

$\underline{\tau(\mathcal{A}_2)\subseteq q}$



$\tau(a),\tau(b)\in q \Rightarrow \tau(r)\subseteq q$

$x\in\mathcal{A}_2=\mathrm{Af}(p\cup\{a\})=\mathrm{Af}(p\cup r)\xRightarrow{\text{lema}}\exists y\in p\ \exists z\in r \ni: x\in\mathrm{Af}(\{y,z\})$

$\Rightarrow \tau(x)\in q \Rightarrow \mathrm{Af}(\tau(\mathcal{A}_2))\subseteq q \Rightarrow \dim\mathrm{Af}(\tau(\mathcal{A}_2))\leq 1$ (i)

Denimo, da smo že definirali $\mathcal{A}_2,\dots\mathcal{A}_{i-1}$.

$\exists a\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_{i-1}$; $\mathcal{A}_i := \mathrm{Af}(\mathcal{A}_{i-1}\cup\{a\})$, $\underbrace{\dim\mathcal{A}_i=i}_{(ii)}$

izberemo $b\in\mathcal{A}_{i-1}$ in definiramo premico $r=\mathrm{Af}(\{a,b\})$

$\tau(r),\tau(\mathcal{A}_{i-1})\subseteq\mathrm{Af}(\tau(r)\cup\tau(\mathcal{A}_{i-1}))=:\mathcal{C}$; $\dim\mathcal{C}\leq i-1$

$x\in\mathcal{A}_i \Rightarrow \exists y\in r\ \exists z\in\mathcal{A}_{i-1} \ni: x\in\mathrm{Af}(\{y,z\}) \Rightarrow \tau(x)\in\mathcal{C}$

$\Rightarrow \tau(\mathcal{A}_i)\subseteq\mathcal{C} \Rightarrow \mathrm{Af}(\tau(\mathcal{A}_i))\subseteq\mathcal{C} \Rightarrow \underbrace{\dim\mathrm{Af}(\tau(\mathcal{A}_i))}\leq\dim\mathcal{C}\ \underbrace{\leq i-1}_{(iii)}$ □

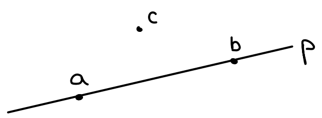
Dokaz (izrek):

Če obstaja $p\in\mathcal{A}$, da $\tau(p)$ ni premica, po lemi τ ni surjektivna. $\times$

□

POSLEDICA: Afina transformacija preslika nekolinearne točke v nekolinearne točke.

Dokaz:



c ne leži na premici p

$\xRightarrow{\tau \text{ inj.}}$ $\tau(c)$ ne leži na $\tau(p)$ $\xRightarrow{\text{izrek}}$ $\tau(c)$ ne leži na premici $\tau(p)$ □

POSLEDICA: Množica afinih transformacij $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je grupa za kompozitum preslikav.

Dokaz:

- $id_{\mathcal{A}}$ je enota grupe
- množica je zaprta za kompozitum ✓
- množica je zaprta za invertiranje

$\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ afina transformacija

a, b, c kolinearne. denimo, da $\tau^{-1}(a), \tau^{-1}(b), \tau^{-1}(c)$ nekolinearne.

$\overset{\text{posledica}}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{\tau(\tau^{-1}(a))}_{=a}, \underbrace{\tau(\tau^{-1}(b))}_{=b}, \underbrace{\tau(\tau^{-1}(c))}_{=c}$ so nekolinearne $\times$

$\Rightarrow \tau^{-1}$ je afina transformacija $\square$

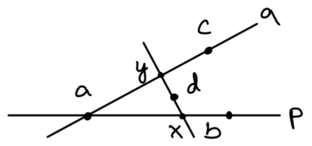
LEMA: $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ afina podprostora vektorskega prostora V nad $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}_2$. Afina transformacija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preslika komplanarne točke v komplanarne točke.

Dokaz:

a, b, c, d na isti ravnini:

(1) a, b, c kolinearne $\Rightarrow \tau(a), \tau(b), \tau(c)$ kolinearne
$\Rightarrow \tau(a), \tau(b), \tau(c), \tau(d)$ na isti ravnini

(2) a, b, c nekolinearne



$Af(p \cup q)$ je ravnina

$d \in Af(p \cup q)$

$\overset{\text{lema}}{\Longrightarrow} \exists x \in p \ \exists y \in q \ \ni: d \in Af(\{x, y\})$

$\Rightarrow \tau(d)$ leži na premici skozi $\tau(x)$ in $\tau(y)$

Premica $\tau(x)\tau(y)$ leži na ravnini $\tau(a)\tau(b)\tau(c)$.

$\Rightarrow \tau(d)$ leži na ravnini $\square$

POSLEDICA: Slika ravnine z afino transformacijo je ravnina (če $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}_2$).

LEMA: $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ afina podprostora vektorskega prostora V nad $\mathcal{O} \neq \mathbb{Z}_2$. Afina transformacija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preslika vzporedni premici v vzporedni premici.

Dokaz:

$p, q \subseteq \mathcal{A}$ vzporedni premici, $p \neq q$

$\dim Af(p \cup q) = 2$ ← RAVNINA $\overset{\text{posledica}}{\Longrightarrow} \dim \tau(Af(p \cup q)) = 2$

$\tau(p), \tau(q) \subseteq Af(\tau(p)\cup\tau(q)) \subseteq \tau(Af(p\cup q))$

$$\Rightarrow \dim Af(\tau(p)\cup\tau(q)) \leq 2$$

$\tau(p)\neq\tau(q) \Rightarrow Af(\tau(p)\cup\tau(q))$ ni premica $\Rightarrow Af(\tau(p)\cup\tau(q))$ je ravnina

$\xRightarrow{\text{lema}} \tau(p)\parallel\tau(q)$

$\square$

IZREK (Osnovni izrek afine geometrije):
Naj bosta $\mathcal{A}=a+U$ in $\mathcal{B}=b+W$ afina podprostora vektorskega prostora V nad obsegom $O\neq\mathbb{Z}_2$ in $\dim\mathcal{A}=\dim\mathcal{B}\geq 2$.
Preslikava $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ je afina transformacija natanko takrat, ko obstajata $c\in\mathcal{B}$ in $A:U\to W$ bijektivna semilinearna preslikava, da je $\tau(x)=A(x-a)+c$.

Dokaz:
$(\Leftarrow)$: τ je kompozitum treh bijekcij $\Rightarrow$ τ je bijekcija

$x+X\subset\mathcal{A}$ afina premica
$\tau(x+X)=A(x-a+X)+c=A(x-a)+\underbrace{A(X)}_{\text{dim 1 - podprostor v } W}+c$

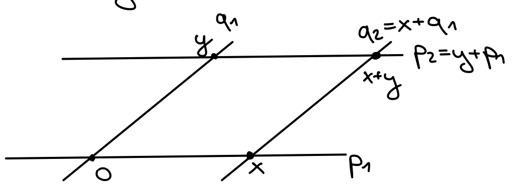
$\Rightarrow \tau(x+X)$ je afina premica v $\mathcal{B}$.

$(\Rightarrow)$: Ker velja $A0=0$, definiramo $c=\tau(a)$ in $Au=\tau(u-a)-\tau(a)$

A je kompozitum treh afinih transformacij $\Rightarrow$ A je afina transformacija

<u>A je aditivna</u>

$x,y\in U$ linearno neodvisna



$\Rightarrow x+y\in p_2\cap q_2 \quad\Rightarrow\quad A(x+y)\in Ap_2\cap Aq_2$

Ap_1 je premica, ki gre skozi $A0=0$ in Ax

Ker $O\neq\mathbb{Z}_2$, afina transformacija ohranja vzporednost $\Rightarrow Ap_2\parallel Ap_1$

$\Rightarrow Ap_2 = Ay + \overset{\ni Ax}{Ap_1}$

Enako dobimo: $Aq_2 = Ax + \overset{\ni Ay}{Aq_1}$

$\Rightarrow Ap_2\cap Aq_2 = \{Ax+Ay\} \Rightarrow \underline{A(x+y)=Ax+Ay}$

Če x,y linearno odvisna, potem obstaja $z\in U$, da x,z in z,y nista linearno odvisna.

$$A(x+y)+Az = A(x+y+z) = Ax + A(y+z) = Ax+Ay+Az$$

$\Rightarrow \underline{A(x+y)=Ax+Ay}$

A je semihomogena

$x \in U \setminus \{0\}$

$A: \mathcal{L}in\{x\} \to \mathcal{L}in\{Ax\}$ je bijekcija

$A(\alpha x) = f_x(\alpha) \cdot Ax \quad (f_x: O \to O)$

f_x neodvisen od x

$x, y \in U$ linearno neodvisna

$f_x(\alpha)Ax + f_y(\alpha)Ay = A(\alpha x) + A(\alpha y) = A(\alpha x + \alpha y) = f_{x+y}(\alpha)A(x+y) =$
$= f_{x+y}(\alpha)Ax + f_{x+y}(\alpha)Ay$

$\Rightarrow f_x(\alpha) = f_{x+y}(\alpha) = f_y(\alpha)$
$\Rightarrow f_x = f_y$

Če x, y linearno odvisna, izberemo z, ki je linearno neodvisen z x in y, potem: $f_x = f_z = f_y$.

$f := f_x$

f aditiven

$f(\alpha+\beta)Ax = A((\alpha+\beta)x) = A(\alpha x) + A(\beta x) = f(\alpha)Ax + f(\beta)Ax = (f(\alpha)+f(\beta))Ax$

$\Rightarrow f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$

f ohranja produkt

$f(\alpha\beta)Ax = A((\alpha\beta)x) = f(\alpha) \cdot f(\beta)Ax$

$\Rightarrow f(\alpha\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$

$\square$

Opomba: Predpostavko v izreku, $O \neq \mathbb{Z}_2$, zamenjamo s "τ ohranja vzporednost".

Množico vseh afinih podprostorov afinega prostora $\mathcal{A}$ imenujemo AFINA GEOMETRIJA nad $\mathcal{A}$ in jo označimo z $A(\mathcal{A})$.

Afini geometriji $A(\mathcal{A})$ in $A(\mathcal{B})$ sta IZOMORFNI, če obstaja bijekcija $\tilde{\tau}: A(\mathcal{A}) \to A(\mathcal{B})$, da $\tilde{\tau}$ in τ^{-1} ohranjata inkluzije.

Velja: $A(\mathcal{A})$ in $A(\mathcal{B})$ sta izomorfni $\Leftrightarrow \exists$ afina transformacija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

DEFINICIJA: Afina transformacija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je DILATACIJA, če za vsak $X \in A(\mathcal{A})$ velja $X \parallel \tau(X)$.

TRDITEV: Vsaka dilatacija ohranja vzporednost.

Dokaz: $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dilatacija, $X, Y \subseteq \mathcal{A}$, $X \parallel Y$:

$\underbrace{\tau(X) \parallel X \parallel Y \parallel \tau(Y)}_{\text{dilataciji}} \Rightarrow \tau(X) \parallel \tau(Y)$ $\square$

IZREK: Naj bo $\mathcal{A} = a + U$ afin prostor.
Preslikava $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je dilatacija natanko takrat, ko obstajata $\lambda \in \mathbb{O}$ in $c \in \mathcal{A}$, da je $\tau(x) = \lambda(x-a) + c$.

Dokaz:

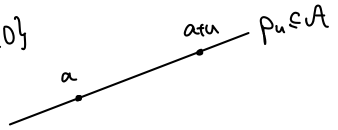
($\Leftarrow$): $x + X$ premica v $\mathcal{A}$

$$\tau(x+X) = \lambda(x-a+X) + c = \lambda(x-a) + \lambda X + c = \tilde{x} + X \Rightarrow \tilde{x} + X \parallel x + X$$

($\Rightarrow$): τ dilatacija $\Rightarrow \tau$ ohranja vzporednost $\Rightarrow$ lahko "uporabimo" osnovni izrek afine geometrije

$\exists A : U \to U$ bijektivna semilinearna in $\exists c \in \mathcal{A} \ni : \tau(x) = A(x-a) + c$

$u \in U \setminus \{0\}$



$\tau(p_u)$ je tudi premica, ki gre skozi $\tau(a)$ in $\tau(a+u)$, in je vzporedna premici p_u.

Smerni vektor premice p_u je $(a+u) - a = u$.
Smerni vektor premice $\tau(p_u)$ je $\tau(a+u) - \tau(a) = (Au + c) - (A0 + c) = Au$

$\xRightarrow{p_u \parallel \tau(p_u)}$ $Au = \lambda_u u$ za nek $\lambda_u \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$

λ_u je neodvisen od indeksa u

$u, v \in U$ linearno odvisna

$$\lambda_u u + \lambda_v v = Au + Av = A(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v) = \lambda_{u+v} u + \lambda_{u+v} v$$
$$\Rightarrow \lambda_u = \lambda_{v+u} = \lambda_v$$

Če u, v linearno odvisna, izberemo w, ki je linearno neodvisen od u in v.

Označimo $\lambda := \lambda_u$

$\Rightarrow \tau(x) = \lambda(x-a) + c$

$\square$

DEFINICIJA: Dilatacija $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je TRANSLACIJA, če je $\tau = id_{\mathcal{A}}$ ali τ nima negibnih točk.

TRDITEV: Dilatacija $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je translacija natanko takrat, ko obstaja $c \in \mathcal{A}$, da je $\tau(x) = x + c$

Dokaz:

($\Leftarrow$) ✓

($\Rightarrow$): $\tau(x) = \lambda(x-a) + c$

Denimo, da je $\tau(x) = x$.

$$\lambda(x-a) + c = x \to \lambda x - x = \lambda a - c$$
$$x(\lambda - 1) = \lambda a - c$$

Če $\lambda \neq 1$, je $x = (\lambda - 1)^{-1}(\lambda a - c)$ negibna točka za τ

$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \tau(x) = x + c$ $\cancel{\quad}$

$\square$

Opomba: Če $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} = 1$, je afina transformacija $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preslikava oblike $\tau(x) = A(x-a) + c$. za neko bijektivno semilinearno preslikavo A.

AKSIOMATSKO DEFINIRANA AFINA RAVNINA

DEFINICIJA: AKSIOMATSKO DEFINIRANA AFINA RAVNINA (ADAR) $\mathcal{A}$ je par množic $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$.
Elemente množice $\mathcal{A}_0$ imenujemo točke, elemente množice $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A}_0)$ pa imenujemo premice.

Premici $p, q \in \mathcal{A}_1$ sta VZPOREDNI, če $p = q$ ali $p \cap q = \emptyset$.

Relacija vsebovanosti (točke na premici) mora zadoščati sledečim aksiomom:

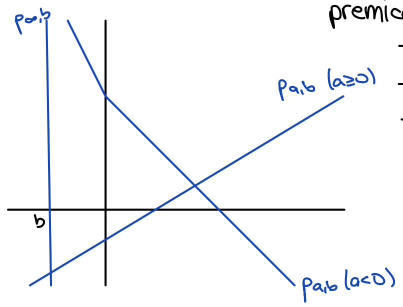
AKSIOM 1: Skozi različni točki poteka natanko ena premica.

AKSIOM 2: Za vsako premico p in točko P obstaja natanko ena premica q, da $P \in q$ in $q \parallel p$.

AKSIOM 3: Obstajajo tri nekolinearne točke.

Primeri:

- Vsak afin podprostor v $\mathcal{O}^n$ dimenzije 2 je ADAR.
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}^n$ afin podprostor, $\dim \mathcal{A} \geq 3$, ne zadošča (A2)
  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}^n$ afin podprostor, $\dim \mathcal{A} = 1$, ne zadošča (A1)
- Moultonova ravnina: točka $\mathcal{A}_0 = \mathbb{R}^2$
  premice $\mathcal{A}_1$:
  - $p_{\infty,b}$ navpična premica $x = b \in \mathbb{R}$
  - $p_{a,b}$ $y = ax + b$, $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$
  - $p_{a,b}$ $y = \begin{cases} ax+b & ; x \geq 0 \\ 2ax+b & x < 0 \end{cases}$; $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$

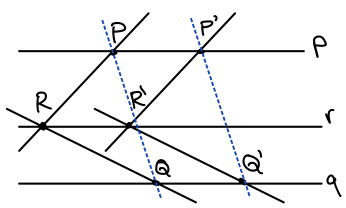


$p_{a,b} \parallel p_{a',b'} \Leftrightarrow a = a'$

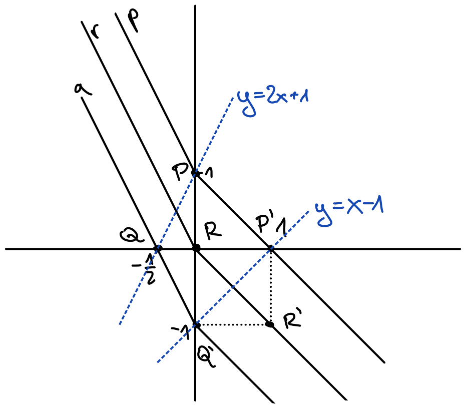
Ali zadošča aksiomom? A1: Skozi dve točki natanko ena premica. ✓
A2: $\forall T, \forall p \ \exists! q \ \ni: p \parallel q \wedge T \in q$ ($\Leftrightarrow$ $\forall p$ je unija vseh vzporednic k p je cel $\mathcal{A}_0$) ✓
A3: $\exists$ tri nekolinearne točke ✓

V afinih podprostorih vektorskih prostorov veljata dva Desarguesova izreka.

PRVI DESARGUESOV IZREK
Naj bodo p, q, r vzporedne različne premice v afini polravnini vektorskega prostora.
Naj bodo $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$ in $R, R' \in r$ take točke, da je $PR \parallel P'R'$ in $RQ \parallel R'Q'$.
Potem je $PQ \parallel P'Q'$.



Moultonova ravnina ne zadošča prvemu Desarguesovem izreku.



$$p: \ y = \begin{cases} -x+1 \ ; & x \geq 0 \\ -2x+1 \ ; & x < 0 \end{cases}$$

$$r: \ y = \begin{cases} -x \ ; & x \geq 0 \\ -2x \ ; & x < 0 \end{cases}$$

$$q: \ y = \begin{cases} -x-1 \ ; & x \geq 0 \\ -2x-1 \ ; & x < 0 \end{cases}$$

$P(0,1) \qquad P'(1,0)$
$R(0,0) \to R'(1,-1)$ (upoštevamo vzporednost)
$Q(-\frac{1}{2},0) \to Q'(0,-1)$

$\Rightarrow PQ \nparallel P'Q'$

Ne obstaja "afina transformacija" iz Moultonove ravnine v kako afino ravnino $\mathcal{O}^2$.

DEFINICIJA: AFINA TRANSFORMACIJA med ADAR $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_0,\mathcal{A}_1)$ in $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)$ je bijekcija $f: \mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}_0$, ki kolinearne točke preslika v kolinearne točke.
Afina transformacija $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je DILATACIJA, če za vsako premico p velja $p \parallel f(p)$.
Dilatacija $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je TRANSLACIJA, če je $f = id_{\mathcal{A}_0}$ ali f nima negibnih točk.

Prvi Desarguesov izrek je ekvivalenten naslednjemu aksiomu:

AKSIOM 4: Za poljubni točki $Q, Q' \in \mathcal{A}_0$ obstaja translacija $\tau: \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$, da je $\tau(Q) = Q'$.

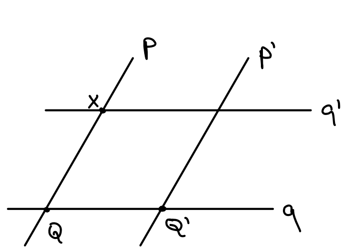
A4 $\Rightarrow$ 1. D.I.

p, q, r vzporedne premice; $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$, $R, R' \in r \ \Rightarrow: \ PR \parallel P'R'$, $RQ \parallel R'Q'$

Po aksiomu 4 obstaja translacija $\tau: \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$, da je $\tau(P) = P'$.

- $p \parallel \tau(p)$ (τ dilatacija) in $P' \in p, \tau(p) \ \Rightarrow \ p = \tau(p)$
- $P' = \tau(P) \in \tau(PR) = \overset{P'}{\tau(P)}\overset{?R'}{\tau(R)}$
  Denimo, da $\tau(R) \neq R'$.
  Ker je $PR \parallel \overset{P'}{\tau(P)}\tau(R)$, je $\tau(R) \in P'R'$. Torej $R\tau(R) \nparallel p$.
  Označimo $X := p \cap R\tau(R)$
  Velja $\underset{\in \tau(R)}{R\tau(R)} \parallel \underset{\in \tau(R)}{\tau(R\tau(R))} \Rightarrow R\tau(R) = \tau(R\tau(R))$
  Torej je $\tau(X) = \tau(p) \cap \tau(R\tau(R)) = p \cap R\tau(R) \Rightarrow X = \tau(X)$
  $\Rightarrow \tau$ ni translacija $\divideontimes$
  $\Rightarrow \tau(R) = R'$
  Enako pokažemo $\tau(Q) = Q'$.
  $\Rightarrow PQ \parallel \tau(P)\tau(Q) = P'Q'$ $\square$

1.D.I $\Rightarrow$ A4



Definiramo translacijo $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da $\tau(Q) = Q'$.
i) $X \notin q = QQ'$: $\exists! \ p' \ \Rightarrow: \ p' \parallel p \wedge Q' \in p'$
$\exists! \ q' \ \Rightarrow: \ q' \parallel q \wedge X \in q'$

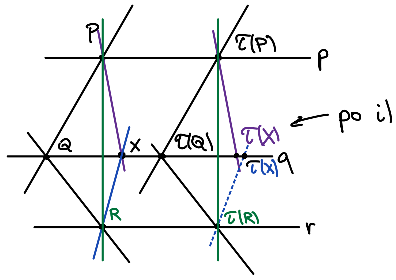
$p' \parallel q'$ in definiramo $\tau(X) := p' \cap q'$

ii) $X \in q$

Definicija $\tau(X)$ je odvisna od izbire točke P.

Po 1. D. I. je $PR \parallel \tau(P)\tau(R)$ in je $RX \parallel \tau(R)\tau(X)$.

$\Rightarrow$ Definicija $\tau(X)$ je neodvisna od izbire točke P.

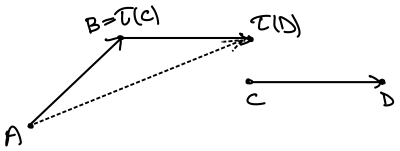


Potrebno je premisliti še, da je τ translacija. $\square$

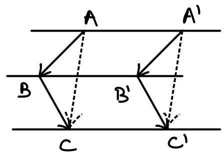
DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ ADAR, ki zadošča aksiomu 4.
USMERJENA DALJICA je urejen par (A, B); $A, B \in \mathcal{A}_0$.
Usmerjeni daljici sta ekvivalentni, če obstaja translacija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\tau(A) = C$ in $\tau(B) = D$.
VEKTOR v $\mathcal{A}$ je ekvivalenčni razred kake usmerjene daljice. Ponavadi pišemo $[(A,B)] = \overrightarrow{AB}$

Aksiom 4 nam omogoči seštevanje vektorjev: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
Obstaja translacija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da $\tau(C) = B$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\tau(C)\tau(D)} = \overrightarrow{A\tau(D)}.$$

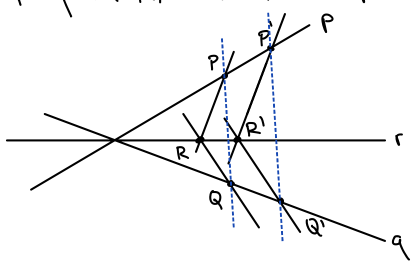


Seštevanje je dobro definirano: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ in $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$



1. D. I $\Rightarrow AC \parallel A'C'$

DRUGI DESARGUESOV IZREK:
Naj bodo p, q, r premice v afini podravnini vektorskega prostora, ki se sekajo v skupni točki.
Naj bodo $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$ in $R', R \in r$ take točke, da je $PR \parallel P'R'$ in $RQ \parallel R'Q'$.
Potem je $PQ \parallel P'Q'$.



Drugi Desarguesov izrek je ekvivalenten naslednjemu aksiomu:

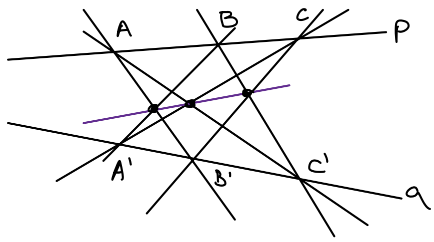
AKSIOM 5: V ADAR $\mathcal{A}$ obstaja točka O z lastnostjo: če sta $Q, Q' \in \mathcal{A}_0$ taki točki, da so O, Q in Q' kolinearne, obstaja dilatacija $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\tau(O) = O$ in $\tau(Q) = Q'$.

Aksiom 5 nam omogoči množenje vektorja s skalarjem.

IZREK: Če ADAR $\mathcal{A}$ zadošča aksiomoma 4 in 5, jo lahko vložimo v vektorski prostor.

PAPPUSOV IZREK:

Naj bosta p in q različni premici v $\mathcal{O}^2$.
Naj bodo $A, B, C \in p$ in $A', B', C' \in q$ take točke, da velja: $AB' \parallel A'B$, $AC' \parallel A'C$ in $B'C \parallel BC'$.
Tedaj so točke $A'B \cap AB'$, $A'C \cap AC'$ in $B'C \cap BC'$ kolinearne.



Pappusov izrek $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}$ je komutativen obseg

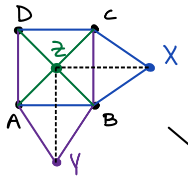
PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

UVOD

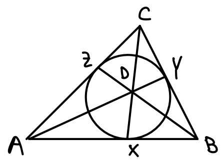
Vse premice v afini ravnini se sekajo na "obzorju".
Projektivno ravnino dobimo, če afini ravnini dodamo točke "obzorja".
Vsakemu razredu vzporednih premic dodamo eno točko.

PRIMERI:

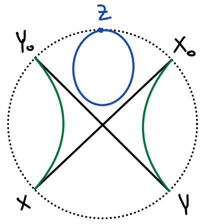
- $\mathbb{Z}_2^2$:



X, Y, Z je obzorje, tj. premica v neskončnosti



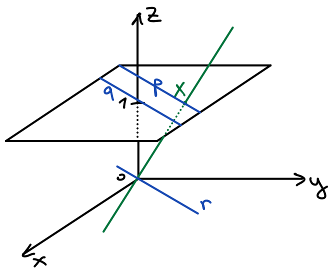
- $\mathbb{R}^2$:



točka v neskončnosti

Ko dodamo dve točki v neskončnosti hiperboli, dobimo sklenjeno krivuljo.
Podobno, ko paraboli dodamo eno točko v neskončnosti, dobimo sklenjeno krivuljo.

Realno afino ravnino vložimo v $\mathbb{R}^3$ na nivo $z=1$.



Vsaka točka na afini ravnini je natanko določena s premico skozi točko in skozi koordinatno izhodišče.

Vsaka premica na afini ravnini je natanko določena z neko ravnino.

Premica v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče, ki ne seka afine ravnine, predstavlja točko v neskončnosti.
Dve vzporedni premici na afini ravnini predstavimo z ravninama v $\mathbb{R}^3$. Ti dve ravnini se sekata v premici, ki predstavlja točko v neskončnosti.

DEFINICIJA: Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor.
Množico vseh vektorskih podprostorov v V imenujemo PROJEKTIVNA GEOMETRIJA nad V in jo označimo s $\mathcal{P}(V)$.
Točke projektivne geometrije so premice v V, premice projektivne geometrije so ravnine v V, ...
Za $U \leq V$ definiramo PROJEKTIVNO RAZSEŽNOST kot $\operatorname{pdim} U = \dim U - 1$.
Razsežnost geometrije je $\operatorname{pdim} V = \dim V - 1$

OPOMBA: $A, B \in \mathcal{P}(V)$ različni (projektivni) točki
$\Rightarrow$ projektivna premica skozi A in B je $A \oplus B$.

OPOMBA: $\dim V = 3$, torej $\operatorname{pdim} \mathcal{P}(V) = 2$; p, q različni (projektivni) premici v $\mathcal{P}(V)$
$\Rightarrow \dim(p) = 2 = \dim(q) \Rightarrow \dim(p \cap q) = \underbrace{\dim(p)}_{} + \underbrace{\dim(q)}_{2} - \underbrace{\dim(p+q)}_{3} = 1$
$\Rightarrow$ p in q se sekata (v projektivni točki)

DUALNOST

Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor nad poljem O.
Dualni vektorski prostor V^* je množica vseh linearnih funkcionalov na V $(f: V \to O)$.
(Ker je O komutativen, je V^* vektorski prostor.)

DEFINICIJA: ZGORNJI ANIHILATOR vektorskega podprostora $U \leq V$ je: $U^\perp = \{f \in V^*;\ f(U) = 0\}$.

SPODNJI ANIHILATOR vektorskega podprostora $W \leq V^*$ je: $W_\perp = \{v \in V;\ f(v) = 0\ \forall f \in W\}$

Jasno je, da sta $U^\perp$ in $W_\perp$ vektorska podprostora.

Dobili smo preslikavi: ${}^\perp: \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V^*)$ in
${}_\perp: \mathcal{P}(V^*) \to \mathcal{P}(V)$

Velja: preslikavi sta bijekciji in sta ena drugi inverz.

IZREK:
1) $W_1 \leq W_2 \leq V \Rightarrow W_2^\perp \leq W_1^\perp \leq V^*$
2) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$
3) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$
4) $\dim W^\perp = \dim V - \dim W = \operatorname{kodim} W$

Dokaz:

1) $f \in W_2^\perp \Rightarrow f(w) = 0\ \ \forall w \in W_2 \supseteq W_1 \Rightarrow f \in W_1^\perp$

2) $(\supseteq)$: $W_1 \cap W_2 \leq W_1, W_2 \Rightarrow W_1^\perp, W_2^\perp \leq (W_1 \cap W_2)^\perp \Rightarrow W_1^\perp + W_2^\perp \leq (W_1 \cap W_2)^\perp$

$(\subseteq)$: $f \in (W_1 \cap W_2)^\perp \Rightarrow f(w) = 0\ \ \forall w \in (W_1 \cap W_2)$

$W_1 = (W_1 \cap W_2) \oplus U_1$ in $W_2 = (W_1 \cap W_2) \oplus U_2$ $\quad (U_1 \cap U_2 = \{0\})$

$V = (W_1 \cap W_2) \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus U_0$

$v \in V \Rightarrow v = w + u_1 + u_2 + u_0$ (razcep je enoličen)

$f(v) = \underbrace{f(w)}_{=0} + f(u_1) + f(u_2) + f(u_0)$

Definiramo: $f_1, f_2: V \to O$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(v) = f(u_2) + f(u_0) \Rightarrow f_1 \in W_1^\perp \\ f_2(v) = f(u_1) \Rightarrow f_2 \in W_2^\perp \end{array}\right\} f = f_1 + f_2 \in W_1^\perp + W_2^\perp$$

3) $(\subseteq)$: $W_1, W_2 \leq W_1 + W_2 \overset{(1)}{\Longrightarrow} (W_1 + W_2)^\perp \leq W_1^\perp, W_2^\perp \Rightarrow (W_1 + W_2)^\perp \leq W_1^\perp \cap W_2^\perp$

$(\supseteq)$: $f \in W_1^\perp \cap W_2^\perp \Rightarrow f(w) = 0\ \ \forall w \in W_1$ in $\forall w \in W_2$ $\quad (f(w_1 + w_2) = f(w_1) + f(w_2) = 0)$

$\Rightarrow f(w) = 0\ \ \forall w \in \mathcal{L}in(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2 \Rightarrow f \in (W_1 + W_2)^\perp$

4) $\{w_1, \dots, w_k\}$ baza za $W \to \{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ baza za V

dualna baza za V^* je: $\{f_1, \dots, f_n\}$, kjer je $f_i(w_j) = \delta_{ij}$ (Kroneckerjev delta)

$\Rightarrow f_1, \dots, f_k \notin W^\perp$, $f_{k+1}, \dots, f_n \in W^\perp$

Denimo, da $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in W^\perp$

Za $j = 1, \dots, k$ je $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i\right)(w_j) = \alpha_j = 0$

$\Rightarrow \{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ je baza za $W^\perp \Rightarrow \dim W^\perp = n - k$

$\square$

Trditev τ o geometriji $\mathcal{P}(V)$ vsebuje elemente geometrije $\mathcal{P}(V)$ in relacije med njimi $(\leq, \geq, \cap, +, \dim)$.

Dualna trditev τ^* k trditvi τ je dobljena tako, da elemente v τ zamenjamo z njihovimi zgornjimi anihilatorji; $\leq$ zamenjamo z $\geq$ (in obratno); $\cap$ zamenjamo s $+$ (in obratno) ter $\dim$ zamenjamo s kodim.

Iz prejšnjega izreka sledi, da je τ resnična $\Leftrightarrow$ τ^* resnična (princip dualnosti).

PRIMERI:

(1) τ: V projektivni ravnini $\mathcal{P}(V)$ skozi poljubni točki poteka natanko ena premica.

$\rightarrow \forall A,B \in \mathcal{P}(V) \ni: \dim A = \dim B = 1 .\ \exists!\ p \in \mathcal{P}(V) \ni: \dim(p) = 2,\ A,B \leq p$

τ^*: $\forall A^\perp, B^\perp \in \mathcal{P}(V^*) \ni:$ kodim $A^\perp =$ kodim $B^\perp = 1 .\ \exists!\ p^\perp \in \mathcal{P}(V^*) \ni:$ kodim$(p^\perp) = 2,\ A^\perp, B^\perp \geq p^\perp$

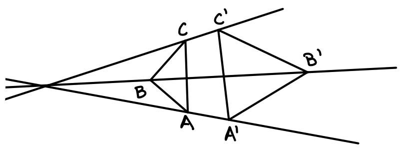
$\rightarrow \forall q,r \in \mathcal{P}(V^*) \ni: \dim(q) = \dim(r) = 2 .\ \exists!\ C \in \mathcal{P}(V^*) \ni: \dim C = 1,\ q,r \geq C$

$\Rightarrow$ Poljubni premici se sekata natanko v eni točki.

(2) τ: A,B,C so kolinearne točke v ravnini $\mathcal{P}(V)$
$\dim A = \dim B = \dim C = 1 .\ \exists p,\ \dim(p) = 2,\ A,B,C \leq p$

τ^*: $\dim A^\perp = \dim B^\perp = \dim C^\perp = 2 .\ \exists p^\perp,\ \dim(p^\perp) = 1,\ A^\perp, B^\perp, C^\perp \geq p^\perp$

DEFINICIJA: Trikotnika ABC in $A'B'C'$ v projektivni ravnini sta v PERSPEKTIVNI LEGI, če $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$ in se premice AA', BB', CC' sekajo v isti točki.



IZREK (Desarguesov izrek v projektivni ravnini):
Trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta v perspektivni legi natanko takrat, ko presečišča $X = AC \cap A'C'$, $Y = AB \cap A'B'$ in $Z = BC \cap B'C'$ ležijo na isti premici.

Dokaz:

($\Rightarrow$): Naj bo $P = AA' \cap BB' \cap CC'$.
Izberemo $a \in A$, $a' \in A'$, $b \in B$, $b' \in B'$, $c \in C$, $c \in C'$, $p \in P$ neničelne vektorje.
Ker $P < AA'$, je $p = \alpha a + \alpha' a'$ za neka $\alpha, \alpha' \in \mathbb{O}$. Podobno je $p = \beta b + \beta' b'$ in $p = \gamma c + \gamma' c'$ za neke $\beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathbb{O}$.
Noben par (α, α'), (β, β'), (γ, γ') ni enak $(0,0)$.

$\Rightarrow \alpha a - \gamma c = \gamma' c' - \alpha' a' =: x \in AC \cap A'C'$
$\alpha a - \beta b = \beta' b' - \alpha' a' =: y \in AB \cap A'B'$
$\beta b - \gamma c = \gamma' c' - \beta' b' =: z \in BC \cap B'C'$

$\Rightarrow x - y = z$

$\Rightarrow X, Y, Z$ kolinearne točke

Izjava ($\Rightarrow$) pravi: A,B,C so nekolinearne, A',B',C' so nekolinearne. AA', BB', CC' se sekajo v isti točki.
$\Rightarrow AC \cap A'C'$, $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ so kolinearne

Dualna izjava $(\Rightarrow)^*$: označimo: $A^\perp = p$, $B^\perp = q$, $C^\perp = r$, $A'^\perp = p'$, $B'^\perp = q'$, $C'^\perp = r'$ in
$E := p \cap q$, $F := p \cap r$, $G := q \cap r$, $E' := p' \cap q'$, $F' := p' \cap r'$, $G' := q' \cap r'$

$(AA')^\perp = (A + A')^\perp = A^\perp \cap A'^\perp = p \cap p' = EF \cap E'F'$
$(BB')^\perp = (B + B')^\perp = B^\perp \cap B'^\perp = q \cap q' = EG \cap E'G'$
$(CC')^\perp = (C + C')^\perp = C^\perp \cap C'^\perp = r \cap r' = FG \cap F'G'$
$(AC \cap A'C')^\perp = (AC)^\perp + (A'C')^\perp = (A^\perp \cap C^\perp) + (A'^\perp \cap C'^\perp) = (p \cap r) + (p' \cap r') = FF'$
$(AB \cap A'B')^\perp = (AB)^\perp + (A'B')^\perp = (A^\perp \cap B^\perp) + (A'^\perp \cap B'^\perp) = (p \cap q) + (p' \cap q') = EE'$
$(BC \cap B'C')^\perp = (BC)^\perp + (B'C')^\perp = (B^\perp \cap C^\perp) + (B'^\perp \cap C'^\perp) = (q \cap r) + (q' \cap r') = GG'$

Izjava $(\Rightarrow)^*$ pravi: p,q,r se ne sekajo v isti točki, p',q',r' se ne sekajo v isti točki
$EF \cap E'F'$, $EG \cap E'G'$, $FG \cap F'G'$ so kolinearne
$\Rightarrow EE'$, FF', GG' se sekajo v isti točki

$(\Rightarrow)^*$: Če EFG in $E'F'G'$ taka trikotnika, da so preseki $EF \cap E'F'$, $EG \cap E'G'$ in $FG \cap F'G'$ kolinearne točke, sta trikotnika v perspektivni legi.

Torej: $(\Rightarrow)^* \equiv (\Leftarrow)$.

$(\Leftarrow)$: Po principu dualnosti velja $(\Leftarrow)$. $\square$

VLOŽITEV AFINE GEOMETRIJE V PROJEKTIVNO

V ... vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{O}$, $\dim V = n+1$
$W < V$ ... $\operatorname{kodim} W = 1$
$a \in V \setminus W$
$\mathcal{A} = a + W$ $\quad (\Rightarrow 0 \notin \mathcal{A})$

Za afin podprostor X v $\mathcal{A}$ označimo $\ell(X) = \mathcal{L}in\{X\} \leq V$; $\ell : A(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(V)$

$\ell(\{x\}) = \mathcal{L}in\{x\}$ premica skozi 0 in x
$\ell(a+U) \subseteq \mathcal{L}in\{a\} + U$

LEMA: $\ell(x+U) = \mathcal{L}in\{x\} \oplus U$

Dokaz:
$(\supseteq)$: $x \in x+U \Rightarrow \mathcal{L}in\{x\} \leq \ell(x+U)$
$U = (x+U) - x \leq \ell(x+U)$
$\Rightarrow \mathcal{L}in\{x\} \oplus U \leq \ell(x+U)$ $\square$

POSLEDICA: $\ell(x+U) \cap \mathcal{A} = x+U$

LEMA: Če je $Z < V$, $Z \not\leq W$, je $Z \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ in $\ell(Z \cap \mathcal{A}) = Z$

Dokaz:
Izberemo $z \in Z \setminus W \Rightarrow W \oplus \mathcal{L}in\{z\} = V$
$\Rightarrow a = \lambda z + w$, $\lambda \in \mathbb{O}$, $w \in W$
$\rightarrow \lambda z = a - w \in \mathcal{A} \cap Z \Rightarrow \mathcal{A} \cap Z \neq \emptyset$

Izberemo $z \in \mathcal{A} \cap Z$. $\Rightarrow \overset{Z \cap V}{Z} = Z \cap W \oplus \mathcal{L}in\{z\}$
$= \ell(z + Z \cap W)$
Velja: $Z \cap \mathcal{A} = (z+Z) \cap \underset{\mathcal{A}}{(z+W)} = z + (Z \cap W)$
$\Rightarrow Z = \ell(Z \cap \mathcal{A})$
$\square$

IZREK: Preslikava $\ell : A(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(V)$ ima sledeče lastnosti:
(1) ℓ je injektivna
(2) $Z \leq V$ je v $Z_\ell \Leftrightarrow Z \not\leq W$. Torej $Z_\ell = \operatorname{Im} \ell = \mathcal{P}(V) \setminus \mathcal{P}(W)$.
(3) ℓ ohranja inkluzije, tj. $X \leq Y \Rightarrow \ell(X) \leq \ell(Y)$
(4) $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ družina afinih podprostorov v $\mathcal{A}$ z nepraznim presekom $\Rightarrow \ell(\cap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \cap_{\lambda \in \Lambda} \ell(X_\lambda)$
(5) $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ družina afinih podprostorov v $\mathcal{A}$: $\ell(\mathrm{Af}(\cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \ell(X_\lambda)$
(6) Za vsak afin podprostor X v $\mathcal{A}$ je $\dim X = \operatorname{pdim} \ell(X)$.
(7) $X \parallel Y$ v $\mathcal{A} \Leftrightarrow \ell(X) \cap W \leq \ell(Y) \cap W$ ali $\ell(Y) \cap W \leq \ell(X) \cap W$.

Dokaz:

(1): $\ell(X)=\ell(Y) \Rightarrow X=\ell(X)\cap\mathcal{A}=\ell(Y)\cap\mathcal{A}=Y$

(2): $Z\not\subseteq W \overset{\text{lema}}{\Rightarrow} Z\in \operatorname{Im}\ell$

$Z\subseteq W$. $x+U\subseteq \mathcal{A}\overset{=a+W}{}$ afin podprostor, $x\notin W$ in $x\in\ell(X) \Rightarrow \ell(X)\not\subseteq W$

$\Rightarrow Z$ ni v $\operatorname{Im}\ell$

(3): (očitno jasno)

(4): $(\subseteq)$: $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\ell(X_\lambda) \Rightarrow \ell(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda)\subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\ell(X_\lambda)$

$(\supseteq)$: $x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$

$\Rightarrow X_\lambda = x+\underset{\subseteq W}{U_\lambda}$ za $\forall\lambda \Rightarrow \ell(X_\lambda)=\mathcal{L}in\{x\}\oplus U_\lambda$

$y\in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\ell(X_\lambda) \Rightarrow y=\alpha_\lambda x+u_\lambda;\ \alpha_\lambda\in O,\ u_\lambda\in U_\lambda$

$\Rightarrow \alpha_\lambda x+u_\lambda=\alpha_\mu x+u_\mu \rightarrow \underbrace{(\alpha_\lambda-\alpha_\mu)x}_{\notin W,\text{ če } \alpha_\lambda-\alpha_\mu\neq 0}=u_\mu-u_\lambda\in W$

$\Rightarrow \alpha_\lambda=\alpha_\mu,\ \forall\lambda,\mu\in\Lambda$ in $u_\lambda=u_\mu,\ \forall\lambda,\mu\in\Lambda$

$\Rightarrow u:=u_\lambda\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ in $\alpha:=\alpha_\lambda\neq 0$

$\Rightarrow y=\alpha x+u$

$\rightarrow \alpha^{-1}y=x+\alpha^{-1}u\in x+\bigcap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in \mathcal{L}in\{x\}\oplus\mathcal{L}in\{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\}=$

$=\mathcal{L}in\{x\}\oplus(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda)=$

$\overset{\text{lema}}{=}\ell(x+\bigcap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda)$

(5): $(\supseteq)$: $\ell(X_\lambda)\subseteq\ell(\mathrm{Af}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda)) \Rightarrow \sum_{\lambda\in\Lambda}\ell(X_\lambda)\subseteq\ell(\mathrm{Af}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda))$

$(\subseteq)$: $x\in\ell(\mathrm{Af}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda)) \Rightarrow x$ linearna kombinacija elementov iz $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$

$\Rightarrow x\in\sum_{\lambda\in\Lambda}\ell(X_\lambda)$

(6): $\ell(x+U)=\mathcal{L}in\{x\}+U$

$\dim(x+U)=\dim\ell(x+U)-1=\operatorname{pdim}\ell(x+U)$

(7): $X,Y\subseteq\mathcal{A}$: $\ell(X)\cap W=(\mathcal{L}in\{x\}\oplus U)\cap W=U$

def: $X\| Y \Leftrightarrow \underset{\ell(X)\cap W}{U}\subseteq \underset{\ell(Y)\cap W}{U'}$ ali $U'\subseteq U$

$\square$

Če označimo s PV množico (projektivnih) točk v $\mathcal{P}(V)$, velja $PV=\ell(a+W)\overset{?}{\sqcup}PW$.
Točkam v PW pravimo TOČKE V NESKONČNOSTI (in so odvisne od izbire vložitve ℓ).

Primer:

$\dim V=3$, $W<V$, $\dim W=2$

$\ell: A(a+W)\rightarrow\mathcal{P}(V)$

p,q vzporedni premici v $a+W \Leftrightarrow \ell(p)\cap W=\ell(q)\cap W$

$\Leftrightarrow$ projektivni premici $\ell(p)$ in $\ell(q)$ se sekata v ∞.

p,q,r vzporedne premice v $a+W \Leftrightarrow \ell(p),\ell(q),\ell(r)$ se sekajo v skupni točki v ∞.

IZREK (Drugi Desarguesov izrek za afino ravnino)

Naj bodo p,q,r različne premice, ki se sekajo v skupni točki O.
Naj bodo $P,P'\in p$, $Q,Q'\in q$ in $R,R'\in r$ take točke, da $PQ\| P'Q'$ in $QR\| Q'R'$.
Tedaj je $PR\| P'R'$.

Dokaz:

Afino ravnino $\mathcal{A}$ (na kateri ležijo p,q,r) vložimo v projektivno ravnino
$\ell: A(\mathcal{A})\rightarrow\mathcal{P}(V)$.

Ker ℓ ohranja inkluzije, je $\ell(O) < \ell(p), \ell(q), \ell(r)$
$\Rightarrow$ projektivne premice $\ell(p)$, $\ell(q)$, $\ell(r)$ se sekajo v skupni točki
$\Rightarrow$ trikotnika $\ell(P)\ell(Q)\ell(R)$ in $\ell(P')\ell(Q')\ell(R')$ sta v perspektivni legi

Po Desarguesovem izreku za projektivno ravnino so presečišča:
$X = \ell(P)\ell(Q) \cap \ell(P')\ell(Q')$, $Y = \ell(Q)\ell(R) \cap \ell(Q')\ell(R')$ in $Z = \ell(R)\ell(P) \cap \ell(R')\ell(P')$
kolinearne točke.

Ker $PQ \parallel P'Q'$, je X točka v neskončnosti.
Ker $QR \parallel Q'R'$, je Y točka v neskončnosti.
Ker so X, Y, Z kolinearne, je tudi Z točka v neskončnosti.

$\Rightarrow PR \parallel P'R'$. $\square$

IZREK (Prvi Desarguesov izrek za afino ravnino)
Naj bodo p, q, r različne vzporedne premice. Naj bodo $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$ in $R, R' \in r$ take točke, da je $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$.
Tedaj je $PR \parallel P'R'$.

Dokaz:
Naj bo $\ell: A(A) \to \mathcal{P}(V)$ vložitev kot v prejšnjem dokazu.
Ker $p \parallel q \parallel r$, se projektivne premice $\ell(p)$, $\ell(r)$, $\ell(q)$ sekajo v skupni točki.
⋮
(nadaljevanje kot v dokazu 2. Desarguesovega izreka) $\square$

KOLINEACIJE in PROJEKTIVNOSTI

DEFINICIJA: Naj bosta V, V' vektorska prostora nad obsegom $\mathbb{O}$ in $\dim V = \dim V' \geq 3$.
Bijektivna preslikava $\vartheta: PV \to PV'$ je KOLINEACIJA, če kolinearne točke preslika v kolinearne.

Primer: $A: V \to V'$ je bijektivna semilinearna preslikava.
$\to \vartheta_A: PV \to PV'$; $X \mapsto AX$
- ϑ_A je bijektivna, saj je A bijektivna
- X, Y, Z kolinearne v $V \Rightarrow Z \leq X \oplus Y$ (projektivna premica skozi X in Y)

$\underset{\vartheta_A Z}{\overset{\shortparallel}{AZ}} < A(X \oplus Y) = \underset{\vartheta_A X}{\overset{\shortparallel}{AX}} \oplus \underset{\vartheta_A Y}{\overset{\shortparallel}{AY}} \Rightarrow \vartheta_A Z$ leži na premici skozi $\vartheta_A X$, $\vartheta_A Y$

$\Rightarrow \vartheta_A$ je kolineacija

LEMA: $\vartheta: PV \to PV'$ kolineacija, $L, L_1, \dots, L_k \in PV$ (projektivne točke)
Če $L < L_1 + \dots + L_k$, je $\vartheta(L) < \vartheta(L_1) + \dots + \vartheta(L_k)$

Dokaz: (indukcija na k)
$k=1$: $L = L_1$ ✓
$k=2$: $L < L_1 + L_2 \Rightarrow L_1, L_2, L$ kolinearne $\Rightarrow \vartheta(L) < \vartheta(L_1) + \vartheta(L_2)$ kolinearne
$k \rightsquigarrow k+1$: $L < L_1 + \dots + L_{k+1}$
Izberemo $v \in L \setminus \{0\} \Rightarrow v = v_1 + \dots + v_{k+1}$ za neke $v_i \in L_i$
Če $v_i = 0$ za kak i, smo v primeru "k".
$v \in \mathcal{L}in\{v_1, \dots, v_k\} + \mathcal{L}in\{v_{k+1}\} \Rightarrow L \underset{\text{I.P.}}{<} \mathcal{L}in\{v_1, \dots, v_k\} + L_{k+1} \overset{\text{I.P.}}{<} L_1 + \dots + L_k + L_{k+1}$ $\square$

Iz leme sledi, da obstaja preslikava med geometrijama $\tilde{\vartheta}: \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V')$, podana s predpisom $\tilde{\vartheta}(L_1 + \dots + L_k) := \vartheta(L_1) + \dots + \vartheta(L_k)$.

Iz leme sledi, da če je $L_1 + \dots + L_k = M_1 + \dots + M_m$, je $\vartheta(L_1) + \dots + \vartheta(L_k) = \vartheta(M_1) + \dots + \vartheta(M_m)$.

Po konstrukciji je $\tilde{\vartheta}$ bijekcija in ohranja inkluzije.

LEMA: Naj bo $\vartheta: PV \to PV'$ kolineacija in $X, Y \leq V$.
(1) $\tilde{\vartheta}(X+Y) = \tilde{\vartheta}(X) + \tilde{\vartheta}(Y)$
(2) $\tilde{\vartheta}(X \cap Y) = \tilde{\vartheta}(X) \cap \tilde{\vartheta}(Y)$.

Dokaz:
(1) $X = L_1 + \dots + L_k$ in $Y = M_1 + \dots + M_m$
$\Rightarrow X + Y = L_1 + \dots + L_m + M_1 + \dots + M_m$
$$\tilde{\vartheta}(X+Y) = \underbrace{\vartheta(L_1) + \dots + \vartheta(L_k)}_{\tilde{\vartheta}(X)} + \underbrace{\vartheta(M_1) + \dots + \vartheta(M_m)}_{\tilde{\vartheta}(Y)} = \tilde{\vartheta}(X) + \tilde{\vartheta}(Y)$$

(2) $\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)$
$$\dim \tilde{\vartheta}(X+Y) \overset{(1)}{=} \dim(\tilde{\vartheta}(X) + \tilde{\vartheta}(Y)) = \underset{\dim X}{\dim \tilde{\vartheta}(X)} + \underset{\dim Y}{\dim \tilde{\vartheta}(Y)} - \dim(\tilde{\vartheta}(X) \cap \tilde{\vartheta}(Y))$$
$\Rightarrow \dim(\tilde{\vartheta}(X) \cap \tilde{\vartheta}(Y)) = \dim X + \dim Y - \dim(X+Y) = \dim(X \cap Y) = \dim \tilde{\vartheta}(X \cap Y)$
$X \cap Y \leq X, Y$
$\Rightarrow \tilde{\vartheta}(X \cap Y) \leq \tilde{\vartheta}(X), \tilde{\vartheta}(Y)$
$\Rightarrow \tilde{\vartheta}(X \cap Y) \leq \tilde{\vartheta}(X) \cap \tilde{\vartheta}(Y)$
$\Rightarrow \tilde{\vartheta}(X \cap Y) = \tilde{\vartheta}(X) \cap \tilde{\vartheta}(Y)$ $\square$

IZREK (Osnovni izrek projektivne geometrije)
Naj bosta V in V' vektorska prostora nad obsegom O in $\dim V = \dim V' \geq 3$. Za vsako kolineacijo $\vartheta: PV \to PV'$ obstaja bijektivna semilinearna preslikava $A: V \to V'$, da je $\vartheta(X) = AX$, za vse $X \in PV$.

Dokaz:
Izberemo $W < V$, $\dim W = \dim V - 1$. in $W' = AW < V'$ ($\Rightarrow \dim W' = \dim W$)
Izberemo $a \in V \setminus W$ in označimo $\mathcal{A} = a + W$ ter $a' \in \vartheta(\mathcal{L}in\{a\}) \setminus \{0\}$ in označimo $\mathcal{A}' = a' + W'$.
Definiramo $\gamma: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ s predpisom $\gamma(x) = \vartheta(\mathcal{L}in\{x\}) \cap \mathcal{A}'$.
Pokažimo, da je γ afina transformacija.

Spomnimo se: $x \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{L}in\{x\} \cap \mathcal{A} = x$
$U \not\leq W \Rightarrow \mathcal{L}in\{U \cap \mathcal{A}\} = U$ (*)

γ je surjektivna: $y \in \mathcal{A}' \Rightarrow \mathcal{L}in\{y\} \cap \mathcal{A}' = y$
projektivna točka v PV'
Ker je ϑ bijekcija, obstaja točka $X \in PV$, da je $\vartheta(X) = \mathcal{L}in\{y\}$
Če $X \leq W$, je $\vartheta(X) = \mathcal{L}in\{y\} \leq \vartheta(W) = W'$ $\times$
$\Rightarrow X \not\leq W \Rightarrow \mathcal{L}in\{X \cap \mathcal{A}\} = X$
$x := X \cap \mathcal{A}$
$\Rightarrow \gamma(x) = \vartheta(\mathcal{L}in\{x\}) \cap \mathcal{A}' = \vartheta(X) \cap \mathcal{A}' = \mathcal{L}in\{y\} \cap \mathcal{A}' = y$

γ je injektivna: $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$
$\vartheta(\mathcal{L}in\{x_1\}) \cap \mathcal{A}' = \vartheta(\mathcal{L}in\{x_2\}) \cap \mathcal{A}'$
$\mathcal{L}in\{\vartheta(\mathcal{L}in\{x_1\}) \cap \mathcal{A}'\} = \mathcal{L}in\{\vartheta(\mathcal{L}in\{x_2\}) \cap \mathcal{A}'\}$
$\overset{(*)}{\Rightarrow} \vartheta(\mathcal{L}in\{x_1\}) = \vartheta(\mathcal{L}in\{x_2\})$

$\overset{\vartheta \text{ bij.}}{\Longrightarrow} \mathcal{L}in\{x_1\} = \mathcal{L}in\{x_2\}$
$\mathcal{L}in\{x_1\} \cap \mathcal{A} = \mathcal{L}in\{x_2\} \cap \mathcal{A}$
$x_1 = x_2$

φ ohranja inkluzije: $X_1, X_2 \subseteq \mathcal{A}$ afina podprostora
$X_1 \subseteq X_2$
$\varphi(X_1) = \vartheta(\mathcal{L}in\{X_1\}) \cap \mathcal{A} \subseteq \vartheta(\mathcal{L}in\{X_2\}) \cap \mathcal{A} = \varphi(X_2)$

φ ohranja vzporednost: $X_1 \parallel X_2$ v $\mathcal{A}$
$\ell: A(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(V)$ vložitev afine geometrije v projektivno
$X_1 \parallel X_2 \Leftrightarrow \ell(X_1) \cap W \subseteq \ell(X_2) \cap W$ ali obratno
$\Leftrightarrow \vartheta(\ell(X_1) \cap W) \subseteq \vartheta(\ell(X_2) \cap W)$ ali obratno
$\Leftrightarrow \vartheta(\ell(X_1)) \cap W' \subseteq \vartheta(\ell(X_2)) \cap W'$ ali obratno (*)
$\Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{L}in(\vartheta(\mathcal{L}in\{x_1\}) \cap \mathcal{A}')}_{\vartheta(\mathcal{L}in\{x_1\})} \cap W \subseteq \underbrace{\mathcal{L}in(\vartheta(\mathcal{L}in\{x_2\}) \cap \mathcal{A}')}_{\vartheta(\mathcal{L}in\{x_2\})} \cap W$
$\Leftrightarrow \vartheta(\mathcal{L}in\{x_1\}) \cap \mathcal{A}' \parallel \vartheta(\mathcal{L}in\{x_2\}) \cap \mathcal{A}'$
$\Leftrightarrow \varphi(X_1) \parallel \varphi(X_2)$

$\Rightarrow \varphi$ afina transformacija, ki ohranja vzporednost

Po osnovnem izreku afine geometrije obstaja bijektivna semilinearna preslikava $B: W \to W$, da je $\varphi(x) = B(x-a) + a''$
Naj bo f avtomorfizem, ki pripada preslikavi B.
Definiramo: $A: V \to V'$ s predpisom $A(\underset{\in W}{w} + \underset{\in \mathcal{O}}{\alpha} a) = Bw + f(\alpha)a''$

A je aditivna: $A((w_1+\alpha_1 a)+(w_2+\alpha_2 a)) = B(w_1+w_2) + f(\alpha_1+\alpha_2)a''$

A je semihomogena: $A(\lambda(w+\alpha a)) = B(\lambda w) + f(\lambda\alpha)a'' = f(\lambda)Bw + f(\lambda)f(\alpha)a''$

$\Rightarrow$ A je semilinearna preslikava, ki ji pripada avtomorfizem f.

Potrebno je še preveriti, da je $\vartheta(L) = AL$ za vse $L \in PV$. $\square$

Vsaka kolineacija $\vartheta: PV \to PV'$ je oblike $\vartheta = \vartheta_A$, kjer je $A: V \to V'$ semilinearna.
Če je A linearna, preslikavo $\vartheta = \vartheta_A$ imenujemo PROJEKTIVNOST.

OPOMBA: Če ne obstaja netrivialen avtomorfizem obsega, je vsaka kolineacija projektivnost.
Na primer, če je $\mathcal{O} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p$; $p \in \mathbb{P}$. ($V \to V'$ linearno obrnljive)

DEFINICIJA: $GL(V)$ ... grupa vseh obrnljivih linearnih preslikav $V \to V$
$\Gamma L(V)$ ... grupa vseh obrnljivih semilinearnih preslikav $V \to V$
$PGL(V)$ ... grupa vseh projektivnosti $PV \to PV$
$P\Gamma L(V)$ ... grupa vseh kolineacij $PV \to PV$
$\mathcal{O}^{\cdot 1} = \mathcal{O} \setminus \{0\}$ ... grupa vseh skalarnih matrik $V \to V$

IZREK: $P\Gamma L(V) \cong \Gamma L(V)/_{\mathcal{O}^{\cdot 1}}$ in $PGL(V) \cong GL(V)/_{\mathcal{O}^{\cdot 1}}$.

Dokaz:
Definiramo: $\xi: \Gamma L(V) \to P\Gamma L(V)$; $\xi(A) = \vartheta_A$.
Po osnovnem izreku projektivne geometrije je ξ surjektivna. Predpis ξ je homomorfizem, saj velja: $\xi(A \cdot B)(L) = \vartheta_{AB}(L) = (AB)(L) = A(B(L)) = \vartheta_A(\vartheta_B(L)) = \xi(A)\xi(B)(L)$.

$\underline{\ker \xi = O^{-1}}$: $(\supseteq)$: $\lambda I \in O^{-1}$ $(\lambda \neq 0)$

$\xi(\lambda I)(L) = \vartheta_{\lambda I}(L) = (\lambda I)(L) = L = id_{PV}$

$\Rightarrow \lambda I \in \ker \xi$

$(\subseteq)$: $A \in \ker \xi \Rightarrow \vartheta_A = id_{PV}$

$v \in V \setminus \{0\} \rightarrow \vartheta_A(\mathcal{L}in\{v\}) = A(\mathcal{L}in\{v\}) = \mathcal{L}in\{Av\}$

$\quad \overset{\shortparallel}{} id_{PV}(\mathcal{L}in\{v\}) = \mathcal{L}in\{v\}$

$\Rightarrow Av = \lambda_v v$ za nek $\lambda \in O \setminus \{0\}$

- u, v linearno neodvisna: $A(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v) = \lambda_{u+v}u + \lambda_{u+v}v$

  $\quad \overset{\shortparallel}{Au+Av} = \lambda_u u + \lambda_v v$

  $\Rightarrow \lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$

- u, v linearno odvisna: izberemo w neodvisen z njima. $\square$

DEFINICIJA: $\dim V = n$. Množica projektivnih točk $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ je **PROJEKTIVNO OGRODJE** oz. **PROJEKTIVNA BAZA** za PV, če nobena n-terica točk ne leži na isti hiperravnini.

OPOMBA:
- $\dim V = 2$: $\{L_0, L_1, L_2\}$ je projektivno ogrodje, če so vse točke različne. ($\dim PV = 1 \rightarrow$ hiperravnina je točka)
- $\dim V = 3$: $\{L_0, L_1, L_2, L_3\}$ je projektivno ogrodje, če nobene tri točke niso kolinearne.

TRDITEV: Naj bo $\{L_0, \dots, L_n\}$ projektivno ogrodje za PV in $\vartheta: PV \rightarrow PV$ taka projektivnost, da je $\vartheta(L_i) = L_i$ za $\forall i$.
Tedaj je $\vartheta = id_{PV}$.

Dokaz:
Naj bo $A: V \rightarrow V$ linearna, da je $\vartheta = \vartheta_A$.
Izberemo $v_i \in L_i \setminus \{0\}$.
Ker je $AL_i = L_i$, obstaja $\lambda_i \in O \setminus \{0\}$, da je $Av_i = \lambda_i v_i$.
Množica $\{v_1, \dots, v_n\}$ je baza za V, saj $L_1, \dots, L_n$ ne ležijo na skupni hiperravnini.
Torej je $v_0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ za neke α_i.
Če $\alpha_j = 0$, projektivne točke $L_0, \dots, L_{j-1}, L_{j+1}, \dots, L_n$ ležijo na isti hiperravnini. $\lightning$
Torej $\alpha_i \neq 0$ za $\forall i = 1, \dots, n$.

$Av_0 = A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n$

$\overset{\shortparallel}{\lambda_0 v_0} = \lambda_0(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \lambda_0 \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_0 \alpha_n v_n$

$\Rightarrow \alpha_i \lambda_i = \lambda_0 \alpha_i$ za $\forall i = 1, \dots, n$ $\Rightarrow \lambda_0 = \lambda_i$ za $\forall i$

$\Rightarrow Av = \lambda_0 v \Rightarrow A$ je skalarna matrika.

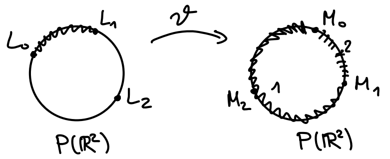
$\Rightarrow \vartheta = id_{PV}$ $\square$

POSLEDICA: Naj bo $\{L_0, \dots, L_n\}$ projektivno ogrodje za PV in $\{M_0, \dots, M_n\}$ projektivno ogrodje za PV'.
Tedaj obstaja natanko ena projektivnost $\vartheta: PV \rightarrow PV'$, da je $\vartheta(L_i) = M_i$ za vse $i = 1, \dots, n$.

Dokaz:
Izberemo $v_i \in L_i \setminus \{0\}$.
Kot prej lahko zapišemo $\overset{=v_0}{v_0'} = \overset{=v_1}{\alpha_1 v_1'} + \dots + \overset{=v_n}{\alpha_n v_n'}$ za neke neničelne skalarje.
$\Rightarrow v_0 = v_1 + \dots + v_n$
Definiramo linearno preslikavo $A: V \rightarrow V'$ s predpisom $Av_i = u_i$, kjer je $u_0 = u_1 + \dots + u_n$ in $u_i \in M_i$ neničeln, za $i = 1, \dots, n$.
Velja: $Av_0 = A(v_1 + \dots + v_n) = Av_1 + \dots + Av_n = u_0$. $\Rightarrow AL_i = M_i$ za vse $i = 0, \dots, n$.

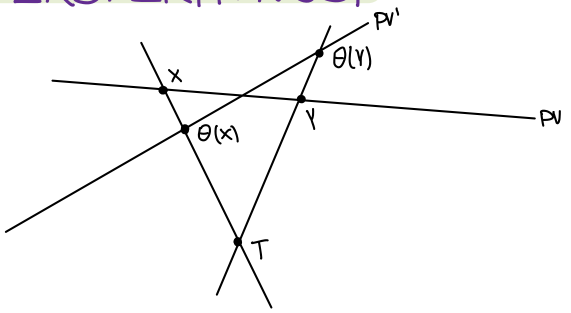
$\Rightarrow$ obstaja (vsaj) ena projektivnost $PV \xrightarrow{\vartheta} PV'$, da je $\vartheta(L_i)=M_i$ za $\forall i=0,\dots,n$.
Denimo, da obstajata dve taki projektivnosti $\vartheta_1, \vartheta_2 : PV \to PV'$.
Projektivnost $\vartheta_2^{-1}\circ\vartheta_1 : PV \to PV$ ima projektivno ogrodje $\{L_0,\dots,L_n\}$ za množico negibnih točk.
Po prejšnji trditvi je $\vartheta_2^{-1}\circ\vartheta_1 = id_{PV} \Rightarrow \vartheta_1=\vartheta_2$. $\square$

PRIMER: $\vartheta: P(\mathbb{R}^2) \to P(\mathbb{R}^2)$ projektivnost
topološko je krožnica



(možnost različne orientacije)

PERSPEKTIVNOST



DEFINICIJA: Naj bosta $U, U' < V$, $\dim U = \dim U'$ in $T < V$, da je $U \oplus T = V = U' \oplus T$.
Preslikavo $\theta: PU \to PU'$, podana s predpisom $\theta(X) = (X \oplus T) \cap U'$, se imenuje PERSPEKTIVNOST s centrom v T.

Najprej pokažimo, da je θ dobro definirana, tj. $\theta(X) \in PU'$ za vse $X \in PU$.

LEMA: Naj bo $U \oplus T = V = U' \oplus T$, $X < U$, $\dim X = 1$.
Potem je $\dim((X \oplus T)\cap U') = 1$.

Dokaz:
$\dim U' + \dim T = \dim V = n$
$\dim(X\oplus T) + \dim U' = n+1 \Rightarrow \dim((X\oplus T)\cap U') \geq 1$
$u_1, u_2 \in (X\oplus T)\cap U'$ neničelna vektorja: $u_1 = x_1 + t_1$ in $u_2 = x_2 + t_2$, $x_1, x_2 \in X$, $t_1, t_2 \in T$.
$\Rightarrow x_2 = u_2 - t_2$
$x_2 = \alpha x_1$ ker $\dim X = 1$
$\alpha x_1 = \alpha(u_1 + t_1)$
$\Rightarrow \underbrace{u_2 - \alpha u_1}_{\in U'} = \underbrace{\alpha t_1 - t_2}_{\in T}$

prazen presek: $U \oplus T = V \Rightarrow U \cap T = \{0\}$
$\Rightarrow u_2 - \alpha u_1 = 0$
$\Rightarrow u_2 = \alpha u_1$
$\Rightarrow \dim((X\oplus T)\cap U') = 1$ $\square$

OPOMBA: V splošnem ne velja: $(X+Y)\cap Z = (X\cap Z) + (Y \cap Z)$.

primer: $X = x$-os v $\mathbb{R}^2$, $Y = y$-os v $\mathbb{R}^2$, Z diagonala
$\Rightarrow (X+Y)\cap Z = Z \neq \{0\} = (X\cap Z) + (Y\cap Z)$

LEMA: $X, Y, Z \le V$, $Z \le X$ $\Rightarrow$ $X \cap (Y+Z) = X \cap Y + Z \cap X$

Dokaz:

$(\supseteq)$: $\left.\begin{array}{l} X\cap Y \le X,\ Y+Z \\ Z \le X,\ Y+Z \end{array}\right\} \Rightarrow X\cap Y + Z \le X \cap (Y+Z)$

$(\supseteq)$: $x \in X \cap (Y+Z) \Rightarrow \overset{\in X}{x} = \overset{\in Y}{y} + \overset{\in Z}{z} \rightarrow y = x - z \in X$

$\Rightarrow y \in X \cap Y$

$\Rightarrow x = y + z = (X \cap Y) + Z$ $\square$

LEMA: Naj bo $\theta: PU \to PU'$ perspektivnost s centrom T.
Tedaj je:

$$X \oplus T = \theta(X) \oplus T \quad \text{za vse } X \in PU$$

Dokaz:

$$\theta(X) \oplus T = ((X \oplus T) \cap U') \oplus T \overset{\text{lema}}{=} (X \oplus T) \cap \overbrace{(U' + T)}^{= V} = X \oplus T \quad \square$$

TRDITEV: Naj bo $\theta: PU \to PU'$ perspektivnost s centrom T.
Inverz $\theta^{-1}: PU' \to PU$ je perspektivnost s centrom T.

Dokaz:

Označimo s $\eta: PU' \to PU$ perspektivnost s centrom T.

$$\eta(\theta(X)) = (\theta(X) \oplus T) \cap U \overset{\text{lema}}{=} (X \oplus T) \cap U \overset{\text{lema}}{=} \underbrace{U \cap T}_{\{0\}} + X = X$$

Enako dobimo $\theta\eta = id_{PU'}$

$\Rightarrow \eta = \theta^{-1}$ $\square$

IZREK: Vsaka perspektivnost je projektivnost.

Dokaz:

$\theta: PU \to PU'$ perspektivnost s centrom T.

Izberemo bazo: $\{u_1, \dots, u_k\}$ za U $\rightarrow$ $L_i = \mathcal{L}in\{u_i\} \in PU$

Označimo: $L_i' = \theta(L_i) = (L_i \oplus T) \cap U'$.

Izberemo neničelne vektorje $u_i' \in L_i' \Rightarrow u_i' = \alpha_i u_i + t_i$; $\alpha_i \in O$, $t_i \in T$.

Če $\alpha_i = 0$, je $u_i' = t_i \in T \cap U \Rightarrow u_i' = 0$ $\times$

$\Rightarrow$ BSS: $\alpha_i = 1$ in $u_i' = u_i + t_i$.

Definiramo linearno preslikavo $A: U \to U'$ s predpisom $Au_i = u_i'$.

Za $L = \mathcal{L}in\{u\} \in PU$ velja: $u = \sum_{i=1}^k \beta_i u_i = \sum_1^k \beta_i (u_i' - t_i) = \sum_1^k \beta_i u_i' - \sum_1^k t_i =$

$= \sum_1^k \beta_i A u_i + t = A \sum_1^k \beta_i u_i + t = Au + t$

$\Rightarrow \theta(L) = (L \oplus T) \cap U' = (\mathcal{L}in\{u\} \oplus T) \cap U' = (\mathcal{L}in\{Au + t\} \oplus T) \cap U' = (\mathcal{L}in\{Au\} \oplus T) \cap U' \overset{\text{lema}}{=}$

$= U' \cap T + \mathcal{L}in\{Au\} = \mathcal{L}in\{Au\} = A\,\mathcal{L}in\{u\} = AL = \vartheta_A(L)$

$\Rightarrow \theta = \vartheta_A$ je projektivnost $\square$

HOMOGENE KOORDINATE

Na množici $O^n \setminus \{0\}$ definiramo ekvivalenčno relacijo:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \sim (\beta_1, \dots, \beta_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in O \setminus \{0\} \ni: \alpha_i = \lambda \beta_i \ \forall i.$$

Ekvivalenčni razred n-terice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ označimo z $[\alpha_1 : \dots : \alpha_n]$.

Naj bo $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ projektivno ogrodje za PV.
Izberemo neničelne vektorje $u_i \in L_i$, da je $u_0 = u_1 + \dots + u_n$.
Za projektivno točko $L = \mathcal{L}in\{u\}$ zapišemo $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ in ji priredimo homogene koordinate $L = [\alpha_1 : \dots : \alpha_n]$.

Koordinate so dobro definirane: $\mathcal{L}in\{\sum_1^n \alpha_i u_i\} = \mathcal{L}in\{\sum_1^n \beta_i u_i\} \Rightarrow [\alpha_1 : \dots : \alpha_n] = [\beta_1 : \dots : \beta_n]$.

$\exists \lambda \in \mathbb{O} \setminus \{0\} \ni: \sum_1^n \alpha_i u_i = \lambda \sum_1^n \beta_i u_i$
$\Rightarrow [\alpha_1 : \dots : \alpha_n] = [\lambda\beta_1 : \dots : \lambda\beta_n] = [\beta_1 : \dots : \beta_n]$. □

Koordinate so odvisne le od izbire projektivnega ogrodja in ne od izbire vektorjev u_i.

Naj za neničelne vektorje $u_i \in L_i$ velja $u_0' = u_1' + \dots + u_n'$.
Obstaja $\lambda \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$, da je $u_0 = \lambda u_0'$; $u_1 + \dots + u_n = \lambda(u_1' + \dots + u_n)$.
Obstajajo skalarji $\lambda_i \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$, da je $u_i = \lambda_i u_i'$: $\lambda_1 u_1' + \dots + \lambda_n u_n' = \lambda u_1' + \dots + \lambda u_n'$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$
Homogene koordinate točke L glede na izbiro vektorjev u_i':
$L = \mathcal{L}in\{u\} = \mathcal{L}in\{\sum_1^n \alpha_i u_i\} = \mathcal{L}in\{\sum_1^n \alpha_i \lambda u_i'\} = [\alpha_1\lambda : \dots : \alpha_n\lambda] = [\alpha_1 : \dots : \alpha_n]$ □

Naj bo p projektivna premica in $\{C, A, B\}$ projektivno ogrodje za p: $\underset{a = 1\cdot a + 0b}{A} = [1:0]$; $B = [0:1]$ in $C = [1:1]$.
Naj bo $D \in p$ in $D \neq A$: $D = [\alpha : \beta]$, $\beta \neq 0$, saj $[\alpha : 0] = [1:0] = A$. $\Rightarrow D = [\beta^{-1}\alpha : 1] = [\lambda : 1]$.

DEFINICIJA: DVORAZMERJE točk A, B, C, D na projektivni premici je skalar $\lambda = \mathcal{D}(A,B,C,D)$, kjer je $D = [\lambda : 1]$ glede na projektivno ogrodje $\{C, A, B\}$.

OPOMBA: Število λ dobimo na sledeči način:
$$c = a + b$$
$$d = \lambda a + b \Rightarrow \lambda = \mathcal{D}(A,B,C,D)$$

TRDITEV: Velja:
- ∘ $\mathcal{D}(B,A,C,D) = \mathcal{D}(A,B,C,D)^{-1} = \mathcal{D}(A,B,D,C)$
- ∘∘ $\mathcal{D}(D,B,C,A) = 1 - \mathcal{D}(A,B,C,D) = \mathcal{D}(A,C,B,D)$

Dokaz:
(∘) Naj bo $\lambda = \mathcal{D}(A,B,C,D)$ in naj velja $c = a + b$, $d = \lambda a + b$.
$\mathcal{D}(B,A,C,D)$: iščemo vektorje a', b', c', d', da je $c' = b' + a'$, $d' = \mu b' + a'$
$c = a + b \rightarrow \underset{c'}{c} = \underset{b'}{b} + \underset{a'}{a}$
$d = \lambda a + b = \lambda a' + b' = b' + \lambda a' \mid \cdot \lambda^{-1}$
$\rightarrow \underset{d'}{\lambda^{-1} d} = \lambda^{-1} b' + a' \rightarrow \lambda^{-1} = \mathcal{D}(B,A,C,D)$

$\mathcal{D}(A,B,C,D)$: $d' = a' + b'$, $c' = \mu a' + b'$
$\underset{d'}{d} = \underbrace{\lambda a}_{a'} + \underset{b'}{b}$ $\rightarrow c = a + b = \lambda^{-1} a' + b' \Rightarrow \lambda^{-1} = \mathcal{D}(A,B,D,C)$

(∘∘) $\mathcal{D}(D,B,C,A)$: $c' = d' + b'$, $a' = \mu d' + b'$
$a = c - b$
$\rightarrow d = \lambda(c - b) + b = \lambda c + (1 - \lambda) b$
$\rightarrow \underset{c'}{\lambda c} = \underset{d'}{d} + \underbrace{(\lambda - 1) b}_{b'}$
$d = \lambda a + b \rightarrow d' = \lambda a + (\lambda - 1)^{-1} b'$
$\rightarrow \lambda a = d' - (\lambda - 1)^{-1} b' \;/ \cdot -(\lambda - 1)$
$\rightarrow \underbrace{-(\lambda - 1)\lambda a}_{a'} = -(\lambda - 1) d' + b' \Rightarrow \mathcal{D}(D,B,C,A) = 1 - \lambda$ □

Velja:

- $\mathcal{D}(B,A,D,C) = \mathcal{D}(A,B,C,D)$
- $\mathcal{D}(D,C,B,A) = \mathcal{D}(A,B,C,D)$

IZREK: Vsaka projektivnost ohranja dvorazmerje.

Dokaz:

Naj bo $\vartheta_M : p \to p'$ projektivnost; $A,B,C,D \in p$ in $\mathcal{D}(A,B,C,D) = \lambda$

$c = a+b \;\rightarrow\; Mc = M(a+b) = Ma + Mb$

$d = \lambda a + b \qquad Md = M(\lambda a+b) = \lambda Ma + Mb$

$\vartheta_M(A) = MA \ni Ma$

$\vartheta_M(B) = MB \ni Mb$

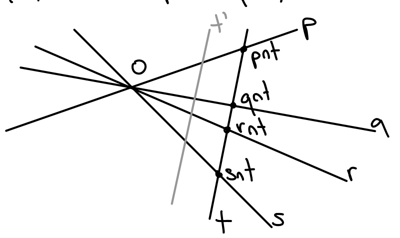
$\vartheta_M(C) = MC \ni Mc$

$\vartheta_M(D) = MD \ni Md$

$\Rightarrow \mathcal{D}(\vartheta_M(A), \vartheta_M(B), \vartheta_M(C), \vartheta_M(D)) = \lambda$

$\square$

DEFINICIJA: Naj bodo p,q,r,s različne projektivne premice v projektivni ravnini, ki gredo skozi skupno točko O. Izberimo poljubno projektivno premico t, ki ne gre skozi O. DVORAZMERJE šopa premic p,q,r,s je
$\mathcal{D}(p,q,r,s) = \mathcal{D}(p\cap t,\, q\cap t,\, r\cap t,\, s\cap t)$



perspektivnost $t \to t'$ s centrom v O nam preseke "lepo" preslika
$\Rightarrow$ definicija neodvisna od izbire t.

HARMONIČNA ČETVORKA

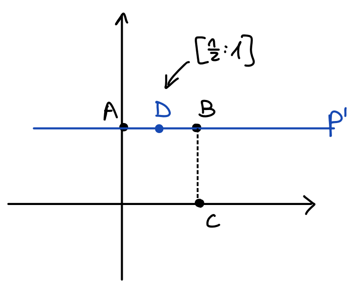
Od sedaj predpostavimo, da je $K(O) \neq 2$.

DEFINICIJA: Točke A,B,C,D na projektivni premici tvorijo HARMONIČNO ČETVERKO, če je $\mathcal{D}(A,B,C,D) = -1$.

OPOMBA: Če je A,B,C,D harmonična četverka, so tudi B,A,C,D; A,B,D,C; B,A,D,C; D,C,B,A harmonične četverke.

IZREK: Naj bodo A,B,C,D različne točke na projektivni premici p. Naj bo p' afina premica vložena v p tako, da je C $(=[1:0])$ točka v neskončnosti. Točke A,B,C,D so harmonična četverka natanko tedaj, ko je D razpolovišče daljice AB na premici p'.

Dokaz:



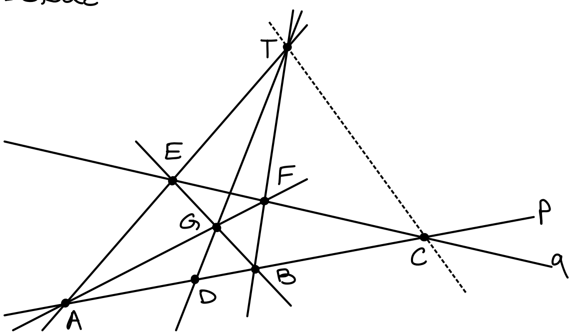
Če vzamemo projektivno ogrodje $\{B,C,A\}$, je C točka v neskončnosti.

D je razpolovišče daljice AB v p' $\Leftrightarrow \mathcal{D}(C,A,B,D) = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \mathcal{D}(A,C,B,D) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
$\Leftrightarrow \mathcal{D}(A,B,C,D) = 1-2 = -1$
$\Leftrightarrow$ A,B,C,D je harmonična četverka

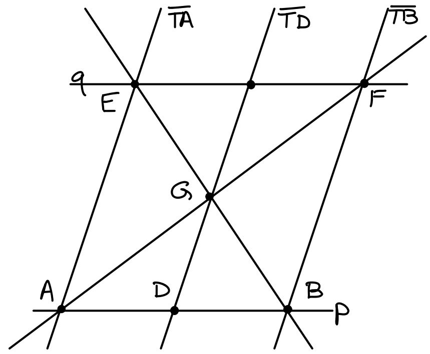
$\square$

IZREK (konstrukcija harmonične četverke):
Naj bodo A, B, C različne točke na projektivni premici p v projektivni ravnini PO^3. Naj bo $q \neq p$ projektivna premica v PO^3, ki gre skozi C.
Naj bo T točka v PO^3, ki ne leži niti na p niti na q.
Označimo $E := \overline{TA} \cap q$, $F := \overline{TB} \cap q$, $G := \overline{EB} \cap \overline{FA}$ in $D := \overline{TG} \cap p$.
Potem je A, B, C, D harmonična četverka.

Dokaz:



premaknemo $\overline{TC}$ v ∞



Na desni skici smo dobili paralelogram $ABFE$, zato točka G razpolavlja obe diagonali, kar pomeni, da točka D razpolavlja daljico $\overline{AB}$ na afini premici $p \setminus \{C\}$.
Po prejšnjem izreku je A, B, C, D harmonična četverka. $\square$

Točka v neskončnosti je taka, ki ima zadnjo homogeno koordinato enako 0:
$T = [1:0:0]$, $C = [0:1:0]$ ...

TRDITEV: Projektivnost $\vartheta: p \to p$ na projektivni premici p, ki ni identiteta, je involucija (tj. $\vartheta^2 = id_p$) natanko tedaj, ko obstajata različni točki $A, B \in p$, da je $\vartheta(A) = B$ in $\vartheta(B) = A$.

Dokaz:
($\Rightarrow$): $\vartheta \neq id_p \Rightarrow \exists A \in p$, da $\vartheta(A) =: B \neq A$
$\vartheta^2 = id_p \Rightarrow \vartheta^2(A) = \vartheta(B) = A$
($\Leftarrow$): Naj bo $C \in p \setminus \{A, B\}$. Označimo $\vartheta(C) =: D$ in $\vartheta(D) =: E$.
$\underline{C = E}$: $\mathcal{D}(A,B,C,D) = \mathcal{D}(\vartheta(A), \vartheta(B), \vartheta(C), \vartheta(D)) =$
$= \mathcal{D}(B, A, D, E)$ ← dvorazmerje se ohrani
$= \mathcal{D}(A, B, E, D)$
$\Rightarrow C = E$
$\square$

STOŽNICE

Naj bo $V = O^n$ vektorski prostor.
Če je $p \in O[x_1, \dots, x_n]$ polinom v n spremenljivkah, množico ničel $\{(x_1, \dots, x_n) \in V; p(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ imenujemo ALGEBRAIČNA MNOŽICA. Če je $n=2$ in je p stopnje 2, jo imenujemo STOŽNICA.
Polinom p je HOMOGEN, če obstaja $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da je $p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d p(x_1, \dots, x_n)$.

Primeri:
- $d = 0$: $p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^0 p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_n)$
  $\lambda = 0 \Rightarrow p(0, \dots, 0) = p(x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in V \Rightarrow p = \text{konstanta}$

- $d=1$: $p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda p(x_1, \dots, x_n)$
  $\Rightarrow p(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$; $\alpha_i \in O$ poljuben
- $d=2$: $p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^2 p(x_1, \dots, x_n)$
  $\Rightarrow p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$

  $n=3$: $p(x,y,z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2$

Homogen polinom p NE definira preslikave $PV \to O$, toda vseeno lahko definiramo množico ničel homogenega polinoma v PV.

DEFINICIJA: Množico ničel $\{[x_1 : \dots : x_n] \in PV ;\ p(x_1, \dots, x_n) = 0\}$, kjer je p homogen polinom, imenujemo PROJEKTIVNA ALGEBRAIČNA MNOŽICA.

OPOMBA: Definicija je dobra, saj velja $p(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d p(x_1, \dots, x_n) = 0 \ \forall \lambda$

Če je $n=3$ in $d=2$, projektivno algebraično množico imenujemo STOŽNICA.

Naj bo $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$.
Označimo: $M = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$ in $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Tedaj je $q(x,y,z) = v^T M v = \langle Mv, v \rangle$
Torej je $q(v) = \langle Mv, v \rangle$ kvadratna forma.

$M = \begin{bmatrix} a & 2d & 2e \\ 0 & b & 2f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

Preslikava $\Phi : V \times V \to O$ je SIMETRIČNA BILINEARNA FORMA na V, če je linearna v obeh faktorjih in je $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$ za vse $x,y \in V$.

Naj bo $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza za V ($\dim V = 3$) in označimo $a_{ij} = \Phi(e_i, e_j)$.
Tedaj je $M = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le 3}$ simetrična matrika. Torej lahko stožnico podamo tudi s simetrično bilinearno formo.

Iz Φ lahko neposredno dobimo kvadratno formo q: $v \in V \Rightarrow v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$
$\Rightarrow \Phi(v,v) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \Phi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = q(v)$

$\Phi(u,v) = u^T M v$

Kako iz kvadratne forme dobimo simetrično formo?
$\Phi(u+v, u+v) = q(u+v)$
$q(u+v) = \Phi(u,u) + \Phi(u,v) + \Phi(v,u) + \Phi(v,v) = q(u) + q(v) + 2\Phi(u,v)$
$\Rightarrow \Phi(u,v) = 2^{-1}(q(u+v) - q(u) - q(v))$ (ker $K(O) \neq 2$)

Stožnice v projektivni ravnini lahko podamo na tri načine:
1) s kvadratno formo q (homogen polinom stopnje 2);
2) s simetrično matriko M;
3) s simetrično bilinearno formo Φ.

Kvadratni formi $q_1, q_2 : V \to U$ s pripadajočima matrikama M_1, M_2 sta ekvivalentni, če obstaja obrnljiva matrika S, da je $M_2 = S M_1 S^T$.

Stožnici $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ sta ekvivalentni, če obstaja projektivnost $\vartheta: PV \to PV$, da je $\vartheta(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$

TRDITEV: Če sta q_1 in q_2 ekvivalentni kvadratni formi, sta pripadajoči stožnici $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ ekvivalentni.

Dokaz:

$\mathcal{S}_i = \{\mathcal{L}in\{v\} \in PV;\ q(v) = 0\} = \{\mathcal{L}in\{v\} \in PV;\ v^T M_i v = 0\}$

Obstaja obrnljiva matrika S, da je $M_2 = S M_1 S^T$.

$\mathcal{S}_1 \sim \mathcal{S}_2 \Leftrightarrow \exists A$ obrnljiva matrika, da je $\vartheta_A(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2 \Leftrightarrow$

$\mathcal{L}in\{v\} \in \vartheta_A(\mathcal{S}_1) \Leftrightarrow \mathcal{L}in\{v\} \in \mathcal{S}_2$

$\vartheta_A^{-1}(\mathcal{L}in\{v\}) \in \mathcal{S}_1$ $\qquad v^T M_2 v = 0$

$\mathcal{L}in\{A^{-1}v\}$

$(A^{-1}v)^T M_1 A^{-1} v = 0$

$v^T (A^{-1})^T M_1 A^{-1} v = 0$

$\Rightarrow$ Če izberemo $A = (S^T)^{-1}$, je $\vartheta_A(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2 \Rightarrow \mathcal{S}_1 \sim \mathcal{S}_2$. $\square$

IZREK (Sylvestrov izrek):

Vsaka kvadratna forma $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je ekvivalentna kvadratni formi oblike $q_{r,s}(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r-1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$; $r, s \geq 0$.

Vsaka kvadratna forma $q: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ je ekvivalentna kvadratni formi oblike $q_r(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2$.

Stožnica je NEIZROJENA, če je pripadajoča matrika maksimalnega ranga (rang $M = 3$).

Klasifikacija stožnic za $\mathbb{O} = \mathbb{C}$:

	rang M	kvadratna forma	stožnica
(✱)	3	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	(edina) neizrojena
	2	$x^2 + y^2 = 0 = (x+iy)(x-iy)$	par projektivnih premic
	1	$x^2 = 0$	(dvojna) projektivna premica

Klasifikacija stožnic za $\mathbb{O} = \mathbb{R}$:

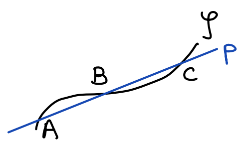
		sgn(r,s)	kvadratna forma	stožnica
	rang=3	(3,0)	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	prazna množica / $\emptyset$
(✱)		(2,1)	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	(edina) neprazna neizrojena stožnica
	rang=2	(2,0)	$x^2 + y^2 = 0$	ena projektivna točka (z-os)
		(1,1)	$x^2 - y^2 = 0 = (x+y)(x-y)$	dve projektivni premici
	rang=1	(1,0)	$x^2 = 0$	(dvojna) projektivna premica

IZREK: Presek neizrojene stožnice in projektivne premice vsebuje največ dve točki. Če je $\mathbb{O}$ algebraično zaprt obseg, je presek neprazen.

Dokaz:

$\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica in p projektivna premica.

Denimo, da ima $p \cap \mathcal{S}$ vsaj tri točke, ki jih označimo z A, B, C.



$\{C, A, B\}$ je projektivno ogrodje za p ; $c = a + b$

Izberemo projektivni vektor d, da je $\{a, b, d\}$ baza za V.

Matrika M, ki pripada stožnici $\mathcal{S}$ v bazi $\{a,b,d\}$:

$$M=\begin{bmatrix}\Phi(a,a) & \Phi(a,b) & \Phi(a,d)\\ \Phi(b,a) & \Phi(b,b) & \Phi(b,d)\\ \Phi(d,a) & \Phi(d,b) & \Phi(d,d)\end{bmatrix}$$

$\Phi(a,a)=q(a)=0$; saj $A\in\mathcal{S}$

$\Phi(b,b)=q(b)=0$; saj $B\in\mathcal{S}$

$$0=\Phi(c,c)=\Phi(a+b,a+b)=\overset{=0}{\Phi(a,a)}+2\Phi(a,b)+\overset{=0}{\Phi(b,b)}\Rightarrow\Phi(a,b)=0$$

$$\Rightarrow M=\begin{bmatrix}0&0&*\\0&0&*\\ *&*&*\end{bmatrix}\Rightarrow \operatorname{rang}M\leq 2\Rightarrow \mathcal{S}\text{ izrojena } \times$$

Naj bo $\mathbb{O}$ algebraično zaprt obseg.

$p=A\oplus B=\mathcal{L}in\{a,b\}$

i) Če $q(b)=0$, je $B\in\mathcal{S}$ in zato $B\in\mathcal{S}\cap p$. ✓

ii) $q(b)\neq 0$:

$\forall P\in p\setminus\{B\}$ je oblike $P=[1:\lambda]$.

Spet izberemo d, da je $\{a,b,d\}$ baza za V.

M matrika za $\mathcal{S}$ v bazi $\{a,b,d\}$

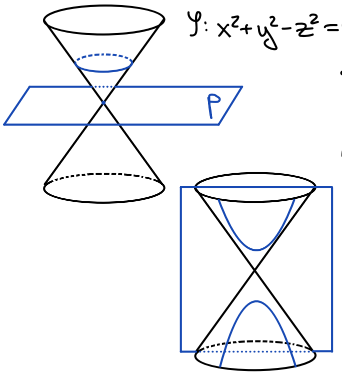
$P\in\mathcal{S}\Leftrightarrow v^TMv=0$

$$\overset{\in}{v}=1a+\lambda b+0d\rightarrow v^TMv=[1\ \lambda\ 0]\cdot\begin{bmatrix}m_{11}&m_{21}&m_{31}\\m_{12}&m_{22}&m_{32}\\m_{13}&m_{23}&m_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\\lambda\\0\end{bmatrix}=m_{11}+\lambda m_{12}+\lambda(m_{12}+\lambda m_{22})=$$
$$=m_{22}\lambda^2+2m_{12}\lambda+m_{11}=0$$

Ker $m_{22}=q(b)\neq 0$, ima enačba vsaj eno rešitev. □

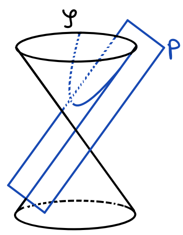
Če $\mathbb{O}=\mathbb{R}$, lahko projektivna premica seka neizrojeno stožnico v 2, 1 ali 0 točkah.

$\mathcal{S}: x^2+y^2-z^2=0$



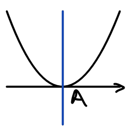
Če je $\mathcal{S}\cap p$ prazna množica, je presek $\mathcal{S}$ in ravnine, ki je vzporedna s p, elipsa.

Če je $\mathcal{S}\cap p$ le ena točka, je presek $\mathcal{S}$ in ravnine, ki je vzporedna s p, parabola.



Če sta $\mathcal{S}\cap p$ dve točki, je presek $\mathcal{S}$ in ravnine vzporedne p, hiperbola.

DEFINICIJA: TANGENTA na $\mathcal{S}$ v točki $A\in\mathcal{S}$ je projektivna premica p, za katero je $\mathcal{S}\cap p=\{A\}$.



DEFINICIJA: Naj bo $A=\mathcal{L}in\{a\}\in PV$ in $\mathcal{S}$ stožnica v PV. Množico točk $\{\mathcal{L}in\{b\}\in PV;\ \Phi(a,b)=0\}=p_A$ imenujemo POLARA točke A glede na $\mathcal{S}$.

TRDITEV: Če je $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica, je polara p_A projektivna premica.

Dokaz:

Definiramo $\varphi_A: V\to\mathbb{O}$; $\varphi_A(v)=\Phi(a,v)$. φ_A je linearen (funkcional).

Če je $\varphi_A\equiv 0$, je pripadajoča matrika zapisana v bazi $\{a,*,*\}$ oblike

$$M=\begin{bmatrix}0&*&*\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix}.$$

Torej je $\mathcal{S}$ izrojena $\Rightarrow\varphi_A$ netrivialen funkcional

Ker je $p_A=\ker\varphi_A$, je $\dim p_A=\dim(\ker\varphi_A)=\dim V-\dim(\operatorname{im}\varphi_A)=3-1=2$

$\Rightarrow p_A$ je projektivna premica. □

TRDITEV: Naj bo $\mathcal{S}$ neizrojena stožnica in $A\in\mathcal{S}$.
Potem je polara p_A tangenta na $\mathcal{S}$ v točki A.

Dokaz:

$a\in A \Rightarrow q(a)=0$

Naj bo $B=\mathcal{L}in\{b\}\in\mathcal{S}\cap p_A$, $B\neq A$.

Torej $q(b)=\Phi(b,b)=0$ $(B\in\mathcal{S})$ in $\Phi(b,a)=0$ $(B\in p_A)$.

Matrika M za $\mathcal{S}$ v bazi $\{a,b,*\}$ je $M=\begin{bmatrix}\Phi(a,a) & \Phi(a,b) & * \\ \Phi(b,a) & \Phi(b,b) & * \\ * & * & *\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & *\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rang} M\neq 3 \Rightarrow \mathcal{S}$ izrojena $\times$ $\square$

TRDITEV: Naj bo $\mathcal{S}$ neizrojena stožnica in $A\in\mathcal{S}$.
Obstaja natanko ena tangenta na $\mathcal{S}$ v A.

Dokaz:

Naj bo p tangenta na $\mathcal{S}$ v A. $\Rightarrow p=\mathcal{L}in\{a,b\}$, $a\in A$

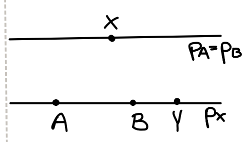
Za poljubno točko $X\in p\setminus\{A\}$ velja $X=\mathcal{L}in\{b+\lambda a\}$ za nek $\lambda\in\mathbb{O}$.

Po predpostavki: $X\notin\mathcal{S}$, zato $0\neq\Phi(b+\lambda a, b+\lambda a)=\Phi(b,b)+2\lambda\Phi(a,b)+\lambda^2\underbrace{\cancel{\Phi(a,a)}}_{A\in\mathcal{S}\ \ 0}$

Če je $\Phi(a,b)\neq 0$, je $X=\mathcal{L}in\{b-(2\Phi(a,b))^{-1}\Phi(a,b)a\}\in\mathcal{S}$. $\times$
$\Rightarrow \Phi(a,b)=0$

Torej $A, \mathcal{L}in\{b\}\in p_A \Rightarrow p_A=p$. $\square$

Velja:
- $A\in p_B \Leftrightarrow B\in p_A$
  $\Phi(b,a)=0=\Phi(a,b)$
- $A\neq B \Rightarrow p_A\neq p_B$:



Denimo, da je $p_A=p_B$.

$\forall X\in p_A=p_B \Rightarrow p_x=\overline{AB}$

$\forall Y\in\overline{AB} \Rightarrow p_Y=p_A=p_B$

Naj bo $Z\in p_x\cap p_A$.
$\Rightarrow p_Z=p_x$ in $p_Z=p_A$
$\Rightarrow p_A=p_x$
$\Rightarrow A\in p_A$ in $B\in p_B\ (=p_A)$
$\Rightarrow p_A$ tangenta na $\mathcal{S}$ v A in p_B tangenta $\mathcal{S}$ v B
$\Rightarrow A=B$.

TRDITEV: Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica.
Tedaj je predpis $\tau: PV\to\{\text{projektivne premice v } PV\}$, $A\mapsto p_A$, bijekcija.

Dokaz:

Že vemo, da je τ injektivna.

Naj bo p poljubna premica v PV.

Izberemo različni točki $A,B\in p$, vemo, da $p_A\neq p_B$.

Označimo $P=p_A\cap p_B$ in dobimo: $P\in p_A$, $P\in p_B$. $\Rightarrow A,B\in p_P \Rightarrow p_A=p$.

Torej je τ surjektivna. $\square$

DEFINICIJA: Točko P, za katero je $\tau(P)=p$ imenujemo POL premice p glede na stožnico $\mathcal{S}$.

IZREK (geometrična konstrukcija polare):
Polaro točke A glede na neprazno neizrojeno stožnico konstruiramo z eno od spodnjih konstrukcij:

(1) Če je $A \in \mathcal{S}$, je p_A edina tangenta na $\mathcal{S}$ v A.

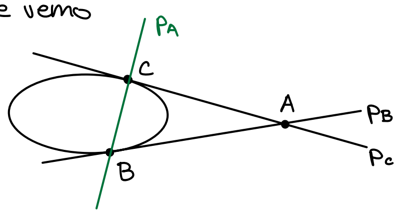
(2) Če je $A \notin \mathcal{S}$ in obstajata dve tangenti na $\mathcal{S}$ skozi A, potem je p_A premica, ki gre skozi dotikališči tangent na $\mathcal{S}$.

(3) Naj bo $A \notin \mathcal{S}$ in ne obstajata dve tangenti na $\mathcal{S}$ skozi A.
Izberemo različni premici p_1 in p_2 skozi A, ki sekata stožnico v dveh točkah. Naj bosta B_i in C_i točki v preseku $\mathcal{S}$ in p_i.
Naj bo D_i presek tangent na $\mathcal{S}$ v B_i in C_i.
Tedaj je $p_A = \overline{D_1 D_2}$.

Dokaz:

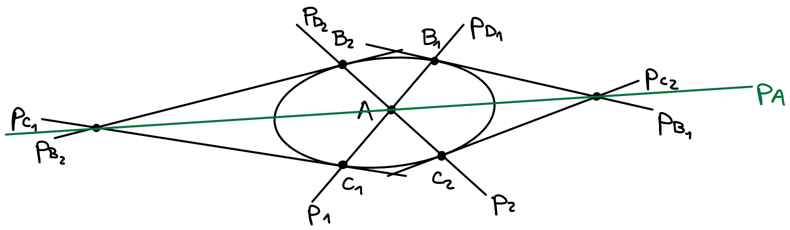
(1) že vemo

(2)



$A \in p_B, p_C \Rightarrow B, C \in p_A \Rightarrow p_A = \overline{BC}$

(3)

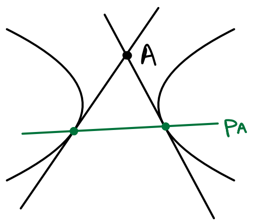


$D_i \in p_{B_i}, p_{C_i} \Rightarrow B_i, C_i \in p_{D_i} \Rightarrow p_{D_i} = \overline{B_i C_i} = p_i$

$A \in p_{D_1}, p_{D_2} \Rightarrow D_1, D_2 \in p_A \Rightarrow p_A = \overline{D_1 D_2}$

$\square$

NALOGA: Naj bo $\mathcal{S}$ stožnica v $\mathbb{R}^2$ podana kot $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$.
Za točko $A(x_0, y_0)$ poišči vse premice, ki gredo skozi A in so tangentne na $\mathcal{S}$.



Standardno vložimo $\mathbb{R}^2$ v $P\mathbb{R}^3$ (na nivo $z=1$).
$\mathbb{R}^2 \hookrightarrow P\mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto [x:y:1]$.
Stožnica $\tilde{\mathcal{S}}$ v $P\mathbb{R}^3$, za katero je $\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\})$, je podana s kvadratno formo:
$q(x,y,z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2$.
Matrika M za $\mathcal{S}$ v standardni bazi je:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Polara točke $X = [x_0 : y_0 : 1]$ je:

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad [x_0 \; y_0 \; z_0] \cdot M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad [x_0 \; y_0 \; z_0] \cdot \begin{bmatrix} ax+by+dz \\ bx+cy+ez \\ dx+ey+fz \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow axx_0 + byx_0 + dzx_0 + bxy_0 + cyy_0 + ezy_0 + dxz_0 + eyz_0 + fzz_0 = 0$$
$$axx_0 + b(yx_0 + xy_0) + cyy_0 + d(zx_0 + xz_0) + e(zy_0 + yz_0) + fzz_0 = 0$$

Ker $A = [x_0 : y_0 : 1]$, v zgornjo enačbo vstavimo $z_0 = 1$.

"Polaro" v $\mathbb{R}^2$ dobimo, če pišemo še $z = 1$.

TRDITEV: Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica, $A \notin \mathcal{S}$, projektivna premica r skozi A pa seka $\mathcal{S}$ v točkah C in D. Naj bo $B = r \cap p_A$.
Potem je A, B, C, D harmonična četverka.

Dokaz:

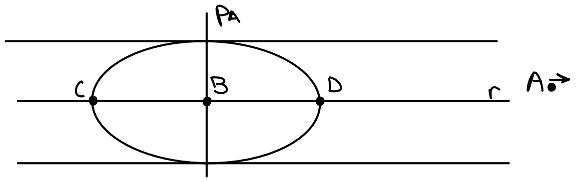
$$\mathcal{D}(A,B,C,D) = \mathcal{D}(D,C,B,A) = \lambda \quad \rightarrow \quad b = d + c \ \wedge \ a = \lambda d + c$$

$$B \in p_A \Rightarrow \Phi(a,b) = \Phi(\lambda d + c, d + c) = \underbrace{\cancel{\lambda\Phi(d,d)}}_{D\in\mathcal{S}\to 0} + \lambda\Phi(d,c) + \Phi(c,d) + \underbrace{\cancel{\Phi(c,c)}}_{C\in\mathcal{S}\to 0} = (1+\lambda)\Phi(c,d)$$

Če je $\Phi(c,d) = 0$, je matrika M za $\mathcal{S}$ v bazi $\{c, d, *\}$ oblike
$$M = \begin{bmatrix} \Phi(c,c) & \Phi(c,d) & * \\ \Phi(d,c) & \Phi(d,d) & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} M < 3 \ \lightning$$

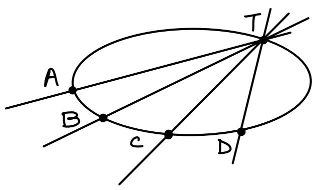
Torej $\Phi(c,d) \neq 0$ in zato $1 + \lambda = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(A,B,C,D) = -1 \qquad \square$$



IZREK (Steinerjev izrek):
Naj bodo A, B, C, D različne točke na neizrojeni stožnici $\mathcal{S}$ in $T \in \mathcal{S}$ poljubna točka.
Potem je $\mathcal{D}(\overline{TA}, \overline{TB}, \overline{TC}, \overline{TD})$ neodvisno od točke T.

Dokaz:



Ker premica seka neizrojeno stožnico v največ dveh točkah, nobena trojica izmed točk A, B, C, D ni kolinearna.
Torej je $\{D, A, B, C\}$ projektivno ogrodje. $(d = a + b + c)$
Za $t \in T \setminus \{0\}$ je $t = xa + yb + zc$.
Matrika M za $\mathcal{S}$ v bazi $\{a, b, c\}$ je
$$M = \begin{bmatrix} \Phi(a,a) & \Phi(a,b) & \Phi(a,c) \\ \Phi(b,a) & \Phi(b,b) & \Phi(b,c) \\ \Phi(c,a) & \Phi(c,b) & \Phi(c,c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika M se spremeni (!), če izberemo druge vektorje:
$$\left.\begin{array}{l} d' = a' + b' + c' \\ \overset{\shortparallel}{\lambda d} = \lambda(a + b + c) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} a' = \lambda a & c' = \lambda c \\ b' = \lambda b & \end{array}$$

Matrika M' za $\mathcal{S}$ v bazi $\{a', b', c'\}$ je:
$$M = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2\alpha & \lambda^2\beta \\ \lambda^2\alpha & 0 & \lambda^2\gamma \\ \lambda^2\beta & \lambda^2\gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

Elementi matrik M in M' niso isti, a velja:
$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\lambda^2\alpha}{\lambda^2\beta} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{\alpha}{\gamma} \ \text{ in } \ \frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

$A = [1:0:0] \quad C = [0:0:1] \quad T = [x:y:z]$
$B = [0:1:0] \quad D = [1:1:1]$

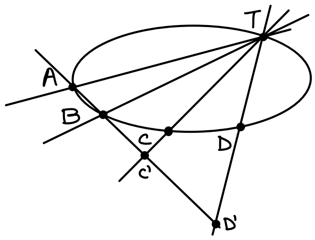
$$D \in \mathcal{S} \Rightarrow [1\ 1\ 1] \cdot M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow [1\ 1\ 1] \cdot \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \gamma \\ \beta + \gamma \end{bmatrix} = 0 \rightarrow 2(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$T \in \mathcal{S} \Rightarrow [x\ y\ z] \cdot M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \rightarrow [x\ y\ z] \cdot \begin{bmatrix} \alpha y + \beta z \\ \alpha x + \gamma z \\ \beta x + \gamma z \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \alpha xy + \beta xz + \alpha xy + \gamma yz + \beta xz + \gamma yz = 0$$

$$\rightarrow \alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$$

(1) A, B, C, D, T so različne točke:



Dvorazmerje šopa računamo na premici $\overline{AB}$:

$C' = \overline{TC} \cap \overline{AB} = [x : y : 0]$
$D' = \overline{TD} \cap \overline{AB} = [x-z : y-z : 0]$

Če $x=0$, točka $T=[x:y:z]$ leži na premici $\overline{BC}$. To ni možno, saj premica seka stožnico v največ dveh točkah. Torej $x \neq 0$ in podobno $y \neq 0$ in $z \neq 0$.

Če $x=y$, točke C, D in T ležijo na isti premici. ↯
Torej $x \neq y$ in podobno $y \neq z$ in $x \neq z$.

$\mathcal{D}(\overline{TA}, \overline{TB}, \overline{TC}, \overline{TD}) = \mathcal{D}(A, B, C', D') = \lambda$:

$$c' = \tilde{a} + \tilde{b} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \underset{\tilde{a}}{\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + \underset{\tilde{b}}{\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$d' = \lambda \tilde{a} + \tilde{b} \qquad \begin{bmatrix} x-z \\ y-z \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{x-z}{x}\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{y-z}{y}\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{y}{y-z}[x-z \quad y-z \quad 0]^T = \frac{(x-z)y}{x(y-z)}[x \ 0 \ 0]^T + [0 \ y \ 0]^T$$

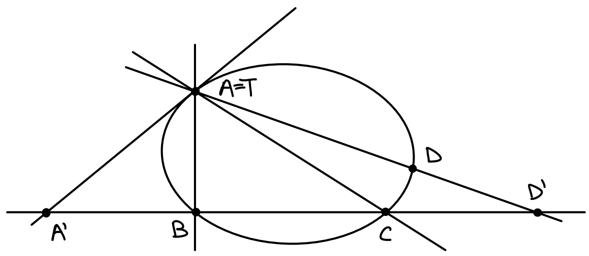
$$\Rightarrow \mathcal{D}(\overline{TA}, \overline{TB}, \overline{TC}, \overline{TD}) = \frac{(x-z)y}{x(y-z)}$$ (Ali je neodvisno od T?)

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha+\beta+\gamma = 0 & / \cdot xy \\ \alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0 & \end{array}\right\} - \Rightarrow \begin{array}{l} \beta(xz-xy) + \gamma(yz-xy) = 0 \\ \beta x(z-y) + \gamma y(z-x) = 0 \\ \beta x(z-y) = \gamma y(x-z) \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \frac{(x-z)y}{x(y-z)} = -\mathcal{D}(\overline{TA}, \overline{TB}, \overline{TC}, \overline{TD})$$

neodvisno od izbire T in baze $\{a, b, c\}$

(2): T je ena izmed točk A, B, C, D.
BŠS lahko predpostavimo, da je $T = A$.



Dvorazmerje računamo na premici $\overline{BC}$:

$D' = \overline{AD} \cap \overline{BC} = [0 : 1 : 1]$
$A' = \overline{AT} \cap \overline{BC} = p_A \cap \overline{BC}$

$p_A : \langle a, M \cdot [x \ y \ z]^T \rangle = 0$

$$(1,0,0) \cdot \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (1,0,0) \cdot \begin{bmatrix} \alpha y + \beta z \\ * \\ * \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow p_A : \alpha y + \beta z = 0$$

$$\Rightarrow A' = [0 : \beta : -\alpha]$$

$\mathcal{D}(\overline{TA}, \overline{TB}, \overline{TC}, \overline{TD}) = \mathcal{D}(A', B, C, D') = \lambda$

$$\tilde{c} = a' + \tilde{b} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix} = \underset{a'}{\begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}} + \underset{\tilde{b}}{\begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$d' = \lambda a' + \tilde{b} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} + \frac{\beta+\alpha}{\beta}\begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

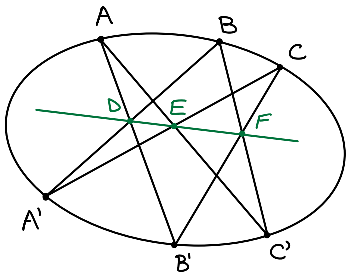
$$\rightarrow \frac{\beta}{\alpha+\beta}[0 \ -\alpha \ -\alpha]^T = \frac{\beta}{\alpha+\beta}[0 \quad \beta \quad -\alpha] + [0 \ -\beta \ 0]$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(\overline{TA}, \overline{TB}, \overline{TC}, \overline{TD}) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\beta}{-\gamma}$$ (dobimo kot v (1)) □

OPOMBA: Če $T=A$, je $\overline{TA}$ tangenta na $\mathcal{S}$ v A, torej $\overline{TA} = p_A$. Podobno za B, C, D.

DEFINICIJA: Naj bo $\mathcal{S}$ neizrojena stožnica in $A,B,C,D \in \mathcal{S}$ različne točke.
DVORAZMERJE $\mathcal{D}(A,B,C,D)$ je enako dvorazmerju šopa $\mathcal{D}(\overline{TA}, \overline{TB}, \overline{TC}, \overline{TD})$, kjer je T poljubna točka na $\mathcal{S}$.

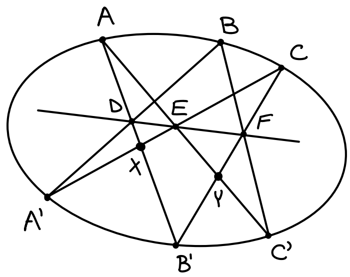
IZREK (Pascalov izrek):
Naj bodo A, B, C, A', B', C' različne točke na neizrojeni stožnici $\mathcal{S}$.
Potem so $D = \overline{AB'} \cap \overline{A'B}$, $E = \overline{AC'} \cap \overline{A'C}$ in $F = \overline{BC'} \cap \overline{B'C}$ kolinearne točke.



Dokaz:

$$\mathcal{D}(A,B,C,B') \overset{\text{na } \mathcal{S}}{=} \mathcal{D}(\overline{A'A}, \overline{A'B}, \overline{A'C}, \overline{A'B'}) \overset{\text{na } \overline{AB'}}{=} \mathcal{D}(A,D,X,B')$$
$$= \mathcal{D}(\overline{EA}, \overline{ED}, \overline{EX}, \overline{EB'})$$

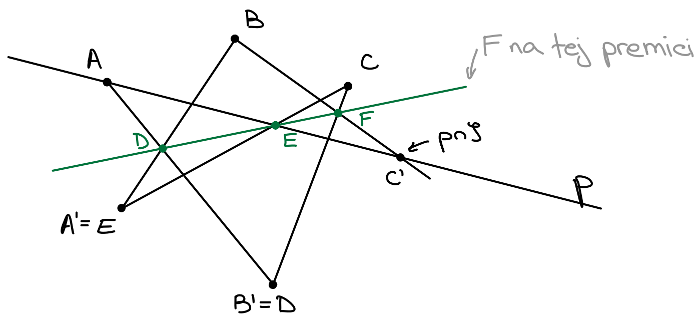
$$\mathcal{D}(A,B,C,B') \overset{\text{na } \mathcal{S}}{=} \mathcal{D}(\overline{C'A}, \overline{C'B}, \overline{C'C}, \overline{C'B'}) \overset{\text{na } \overline{CB'}}{=} \mathcal{D}(Y,F,C,B')$$
$$= \mathcal{D}(\overline{EY}, \overline{EF}, \overline{EC}, \overline{EB'})$$
$$= \mathcal{D}(\underset{\overline{C'A}}{\underset{\parallel}{\overline{EA}}}, \overline{EF}, \underset{\overline{CA'}}{\underset{\parallel}{\overline{EX}}}, \overline{EB'})$$



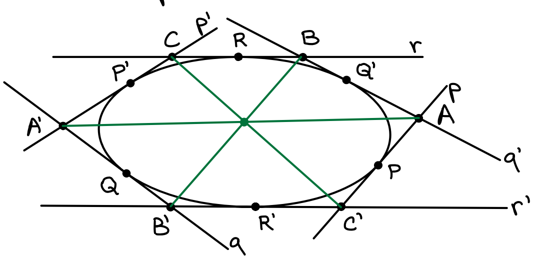
Če se dvorazmerje ujema v treh točkah/premicah, se tudi v četrti.
$\Rightarrow \overline{ED} = \overline{EF} \Rightarrow D, E, F$ so kolinearne $\square$

Pet točk v (projektivni) ravnini določa stožnico.

Naj bodo A,B,C,D,E točke, ki določajo stožnico $\mathcal{S}$, in naj bo p premica skozi A, ki ni tangentna na $\mathcal{S}$.
Kako konstruiramo točko, ki je v preseku $p \cap \mathcal{S}$ in ni A?



IZREK (Brianchonov izrek):
Naj bodo p, q, r, p', q', r' različne tangente na neizrojeno stožnico $\mathcal{S}$.
Označimo presečišča $p \cap q'$, $q' \cap r$, $r \cap p'$, $p' \cap q$, $q \cap r'$, $r' \cap p$ zaporedno z A, B, C, A', B', C'.
Potem se premice $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ in $\overline{CC'}$ sekajo v skupni točki.



Dokaz:

Po Pascalovem izreku so točke $X=\overline{PQ'}\cap\overline{P'Q}$, $Y=\overline{PR'}\cap\overline{P'R}$ in $Z=\overline{QR'}\cap\overline{Q'R}$ kolinearne.

Premica $\overline{PQ'}$ je polara p_A in premica $\overline{P'Q}$ je polara $p_{A'}$.

Točka X leži na polarah p_A in $p_{A'}$, točki A in A' ležita na $p_X \Rightarrow p_X=\overline{AA'}$.

Enako dobimo, da je $p_Y=\overline{CC'}$ in $p_Z=\overline{BB'}$.

Označimo $T=\overline{AA'}\cap\overline{BB'}=p_X\cap p_Z$ in $T'=\overline{AA'}\cap\overline{CC'}=p_X\cap p_Y$.

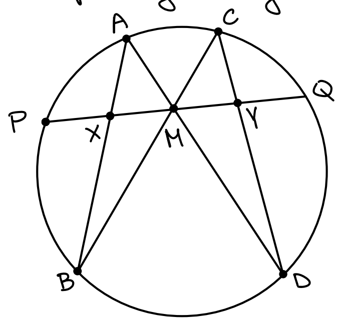
Torej $X,Z\in p_T$ in $X,Y\in p_{T'} \Rightarrow p_T=\overline{XZ}$ in $p_{T'}=\overline{XY}$.

Ker so X,Y,Z kolinearne, je $p_T=p_{T'}$.

Torej je $T=T'$ in se $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ in $\overline{CC'}$ sekajo v skupni točki. $\square$

IZREK (Izrek o metulju):

Naj bo PQ tetiva v krožnici in M njeno razpolovišče.
Naj bosta AB in CD tetivi krožnice, ki gresta skozi točko M.
Naj bo X presek tetiv PQ in AD in Y presek tetiv PQ in BC.
Tedaj M razpolavlja daljico XY.



Dokaz:

$$\mathcal{D}(P,D,B,Q)\overset{\text{na } \mathcal{Y}}{=}\mathcal{D}(\overline{AP},\overline{AD},\overline{AB},\overline{AQ})\overset{\text{na } \overline{PQ}}{=}\mathcal{D}(P,X,M,Q)$$

$$\mathcal{D}(P,D,B,Q)=\mathcal{D}(\overline{CP},\overline{CD},\overline{CB},\overline{CQ})=\mathcal{D}(P,M,Y,Q)$$

Ravnino vložimo na nivo $z=1$, da je $M=(0,0,1)$, $Q=(1,0,1)$ ($\Rightarrow P=(-1,0,1)$), $Y=(a,0,1)$, $X=(-b,0,1)$.

Iz enakosti dvorazmerij (po krajšem računu) dobimo $a=b$. $\square$